[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{4}$]

放物線 $y=x^2$ のうち，$-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする。

座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

---

(1) $\mathrm{Q}(X, Y)$ とおく。

条件より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから，$\mathrm{P}\left(\dfrac{X}{2}, \dfrac{Y}{2}\right)$

よって，点 P が C 上にあるための条件は

$$\frac{Y}{2}=\left(\frac{X}{2}\right)^2 \quad \left(-1 \leqq \frac{X}{2} \leqq 1\right)$$

したがって

$$Y=\frac{1}{2}X^2 \quad (-2 \leqq X \leqq 2)$$

以上より，点 Q の軌跡は，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ （$-2 \leqq x \leqq 2$）

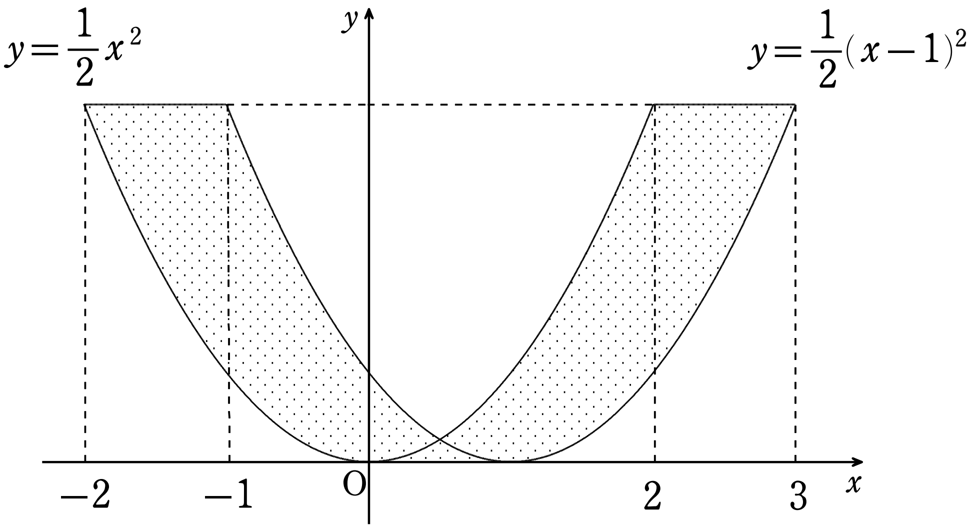
(2) (1)で求めた軌跡を D とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ であり，点 R が線分 OA 上を動くので

点 S は点 Q の軌跡 D を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

その図形を D' とすると，D' は $y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ （$-1 \leqq x \leqq 3$） となる。

よって，点 S が動く領域を図示すると次の図の打点部分になる。ただし，境界を含む。



D と D' の交点の座標は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ である。

D の $-2 \leqq x \leqq 0$，$0 \leqq x \leqq 2$ の部分が平行移動したときの通過領域の面積は，対称性から同じであり，

縦が2，横が1の長方形の面積と等しいので　$2 \cdot 1 = 2$

これらが重なっている部分の面積は

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$$

したがって，求める面積は

$$2 \cdot 2 - \frac{1}{24} = \frac{9}{24}$$