[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{3}$]

★―――★

$a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。

(1) $x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の２条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件１：$f(x)=b$ は相異なる３実数解をもつ。

条件２：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

★―――★

(1) $f(x)=x^3-3a^2x$

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

表より，$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための a の条件は $0<a\leqq 1$

(2) $0<a\leqq 1$ のとき，$f(x)$ は $x\geqq 1$ で単調増加であり，

方程式 $f(x)=b$ の 1 より大きい実数解の個数は，1個または0 個となる。

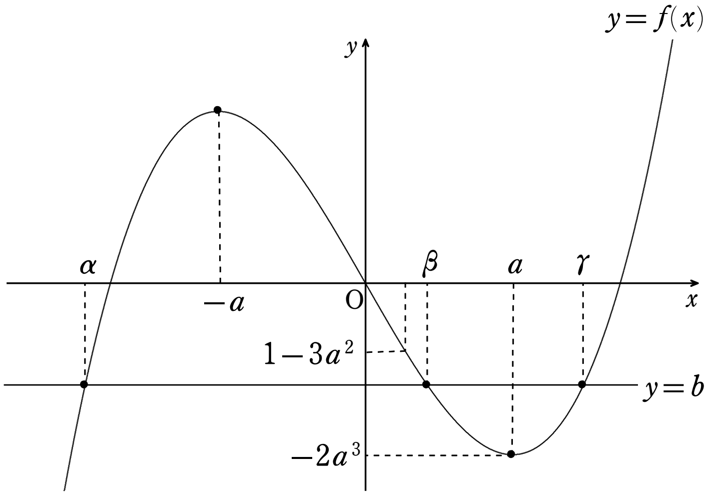
これは条件２に反するので，$a>1$ であることが必要である。

さらに，$f(x)=b$ が相異なる３実数解をもち，

２番目に小さいものが 1 より大きくなるのは

$$f(a)<b<f(1)$$

を満たすときである。



よって，$-2a^3 < b < 1-3a^2$ となるときであり，

これを図示すると下図の打点部分である。ただし，境界は含まない。