［ 東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) a_7 と1の大小を調べよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ をみたす n の範囲を求めよ。

(3) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

---

(1) $a_7 = \dfrac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!} = \dfrac{\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{7!} = \dfrac{13\cdot11\cdot3\cdot8}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{13\cdot11}{7\cdot6\cdot5} = \dfrac{143}{210} < 1$

(2) $a_n = \dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} = \dfrac{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}}{n!} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$ であるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\dfrac{(2n)!}{(n!)^3}}{\dfrac{\{2(n-1)\}!}{\{(n-1)!\}^3}} = \frac{(2n)!}{(n!)^3}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^3}{(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{n^3} = \frac{4n-2}{n^2}$$

よって $\dfrac{4n-2}{n^2} < 1 \iff n^2-4n+2>0$ …①

$n^2-4n+2=0$ を解くと $n=2\pm\sqrt{3}$ より①の解は $n<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<n$

いま，$n \geqq 2$ であるから 求める n の範囲は $n \geqq 4$

(3) すべての n に対し，$a_n>0$ であり

(2)より $n \geqq 4$ のとき $a_n < a_{n-1}$ であるから，$n \geqq 3$ において a_n は単調減少する数列である。

よって(1)より，$n \geqq 7$ においては $0 < a_n < 1$ となり a_n は整数にならない。

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のときを調べればよい。

$$a_1 = \frac{{}_2\mathrm{C}_1}{1!} = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} = 2 \cdot \frac{6}{4} = 3$$

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{a_3}{a_2} = 3 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{3}$$

$$a_4 = a_3 \cdot \frac{a_4}{a_3} = \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{16} = \frac{35}{12}$$

$$a_5 = a_4 \cdot \frac{a_5}{a_4} = \frac{35}{12} \cdot \frac{18}{25} = \frac{21}{10}$$

$$a_6 = a_5 \cdot \frac{a_6}{a_5} = \frac{21}{10} \cdot \frac{22}{36} = \frac{77}{60}$$

であるから，求める n は　$n = 1$，2