[東京大学 2018 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面上に放物線 C を

$$y = x^2 - 3x + 4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2 - 3x + 4$$

で定める。原点をとおる 2 直線 $\ell,\ m$ は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 C と直線 $\ell,\ m$ の距離をそれぞれ $L,\ M$ とする。

$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し，不等式 $px + qy \leqq 0$ がなりたつ。

直線 $y = ax$ が $C: y = x^2 - 3x + 4$ と接するような a を求める。

$ax = x^2 - 3x + 4 \iff x^2 - (a+3)x + 4 = 0$ の判別式が 0 になることから

$(a+3)^2 - 4^2 = 0$ より $a + 3 = \pm 4$

よって $a = 1,\ -7$

ここで，$\ell: y = x,\ m: y = -7x$ とおく。

(1) $\mathrm{A}(t,\ t^2 - 3t + 4)$ とおくと，

$\ell: x - y = 0$ であり，点と直線の距離から

$$L = \frac{|t - (t^2 - 3t + 4)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-(t-2)^2|}{\sqrt{2}} = \frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

$m: 7x + y = 0$ であり，同様にして

$$M = \frac{|7t + (t^2 - 3t + 4)|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{|(t+2)^2|}{5\sqrt{2}} = \frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

したがって $\sqrt{L} + \sqrt{M} = \sqrt{\dfrac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}} = 2^{-\frac{1}{4}}\left(|t-2| + \dfrac{1}{\sqrt{5}}|t+2|\right)$

ここで，$f(t) = |t-2| + \dfrac{1}{\sqrt{5}}|t+2|$ とおく。$f(t)$ が最小になるとき，$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ も最小になる。

（ｉ）$t \leqq -2$ のとき　$f(t) = -(t-2) - \dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

（ⅱ）$-2 \leqq t \leqq 2$ のとき　$f(t) = -(t-2) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

（ⅲ）$t \geqq 2$ のとき　$f(t) = (t-2) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(t+2)$

それぞれの $f(t)$ は t の１次関数であり，それぞれの傾きは

$$-1-\frac{1}{\sqrt{5}} < 0,\ -1+\frac{1}{\sqrt{5}} < 0,\ 1+\frac{1}{\sqrt{5}} > 0$$

であるから，$f(t)$ は $t=2$ のときに最小となる。

したがって，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ もこのとき最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

(2) D 内の点 $(0,\ 4)$ についても $px+qy \leqq 0$ が成り立つことが必要であるから

$4q \leqq 0 \iff q \leqq 0$

（ｉ）$q=0$ のとき

$px+qy \leqq 0 \iff px \leqq 0$ となるが，D 内の点の x 座標はすべての実数値をとるので，

これが成り立つ条件は　$p=0$

（ⅱ）$q<0$ のとき

$px+qy \leqq 0 \iff qy \leqq -px \iff y \geqq -\dfrac{p}{q}x$ となるが，$n=-\dfrac{p}{q}$ とおくと，$y \geqq nx$ となる。

D 内のすべての点が $y \geqq nx$ を満たすような n の値の範囲は $-7 \leqq n \leqq 1$ である。

したがって　$-7 \leqq -\dfrac{p}{q} \leqq 1$

$q<0$ に注意して　$q \leqq -p$　かつ　$q \leqq \dfrac{1}{7}p$

よって，求める領域は図の打点部分である。

ただし，境界も含む。