[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{1}$]

実数 $a,\ b$ に対して

$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための $a,\ b$ についての条件を求めよ。

また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

---

(1) $f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$

$$=-3\cos\theta+4\cos^3\theta+a\left(2\cos^2\theta-1\right)+b\cos\theta$$

$$=-3x+4x^3+a(2x^2-1)+bx$$

$$=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a$$

ここで，$f(0)=1+a+b$ であり，$\theta=0$ すなわち $x=1$ のとき $f(\theta)-f(0)=0$ となるから

$$f(\theta)-f(0)=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a-(1+a+b)$$

$$=4x^3+2ax^2+(b-3)x-(2a+b+1)$$

$$=(x-1)\{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1\}$$

となる。

したがって

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

$$=\frac{(x-1)\{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1\}}{x-1}$$

$$=4x^2+2(a+2)x+2a+b+1$$

を得る。

(2) $g(\theta)=4\left(x+\dfrac{a+2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a+2)^2+2a+b+1$

$$=4\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a+b$$

である。

$g(\theta)$の $0<\theta<\pi$ すなわち $-1<x<1$ における最小値は

$-1<-\dfrac{a+2}{2}<1$ のとき　$-\dfrac{1}{4}a^2+a+b$

それ以外のとき　存在しない

となる。

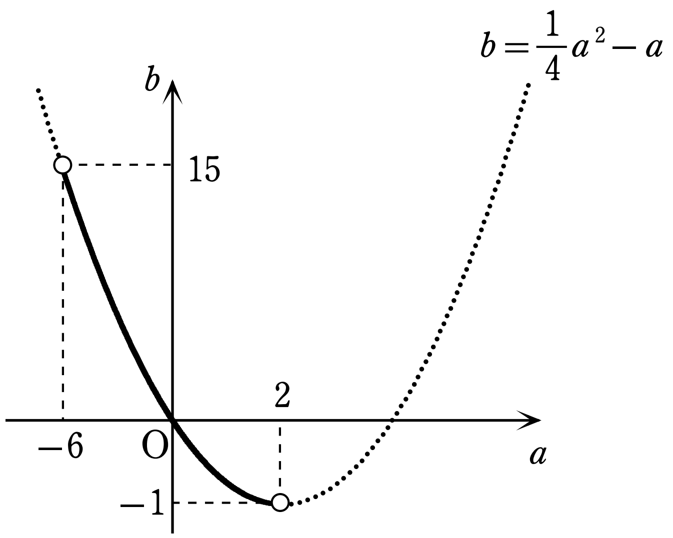
よって，$g(\theta)$が$0<\theta<\pi$の範囲で最小値0をとるためのa, bについての条件は

$-1<-\dfrac{a+2}{2}<1$ かつ $-\dfrac{1}{4}a^2+a+b=0$

したがって

$b=\dfrac{1}{4}a^2-a$　（$-6<a<2$）

となり，これを図示する次の図の太線部分になる。ただし，端点は含まない。



[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{2}$]

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

（a）最初に，点 P は原点 O にある。

（b）ある時刻で点 P が格子点 (m, n) にあるとき，その1秒後の点 P の位置は，

隣接する格子点 $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ のいずれかであり，

また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

（1）点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ にある確率を求めよ。

（2）点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

（1）①：$(m, n) \to (m+1, n)$

②：$(m, n) \to (m, n+1)$

③：$(m, n) \to (m-1, n)$

④：$(m, n) \to (m, n-1)$

点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ にあるのは，

①または②が３回，③または④が３回起こるときである。

①または②が起こる確率は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，③または④が起こる確率は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

であるから，求める確率は ${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

（2）点 P が最初から 6 秒後に原点 O にあるのは，左右の移動回数と上下の移動回数が等しいときである。

これが起こるのは「①３回②３回」，「①２回②２回③１回④１回」，「①１回②１回③２回④２回」，

「③３回④３回」のときであり，求める確率は

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{1!1!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{20+180+180+20}{4^6}=\frac{25}{256}$$

[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{3}$]

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

（1）α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。

点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる。

この円の中心と半径を求めよ。

（2）1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

（1）L は，点 α と O から等距離にある点の集合なので，$|z-\alpha|=|z|$ が成り立つ。

ここで，$w=\dfrac{1}{z}$ より $w\neq 0$ であり，このもとで

$$w=\frac{1}{z} \iff z=\frac{1}{w}$$

である。したがって

点 w（$\neq 0$）が求める軌跡上にある

$\iff$ $z=\dfrac{1}{w}$ が L 上にある

$$\iff \left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=\left|\frac{1}{w}\right|$$

$$\iff |1-\alpha w|=1$$

$$\iff \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|} \quad (\because \alpha\neq 0)$$

となるから，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円から 1 点 O を除いたものである。

（2）$x^3-1=0$ とすると

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ であるから

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad \beta^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

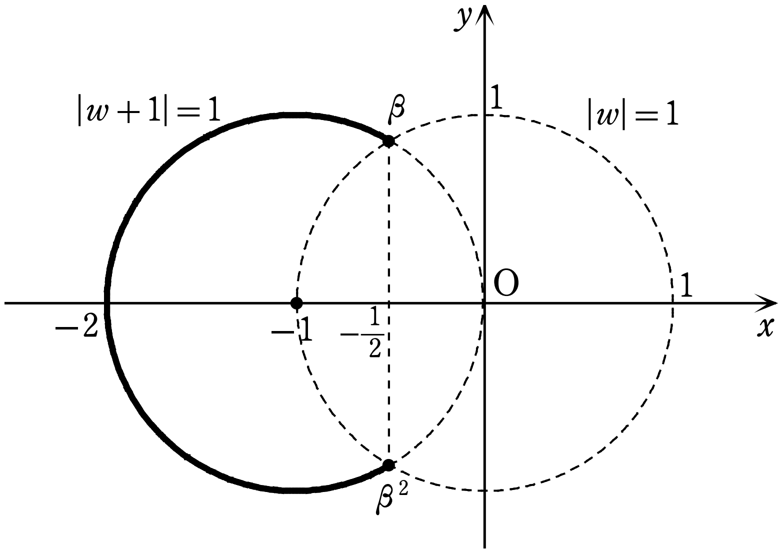
である。

この 2 点を結ぶ線分は，点 -1 と O を結ぶ線分の垂直二等分線のうち，$|z| \leqq 1$ を満たす部分である。

よって，(1)の結果において，$\alpha = -1$ とした「中心 -1，半径1の円から 1 点 O を除いたもの」のうち，

$|z| \leqq 1$ すなわち $|w| \geqq 1$ を満たす部分である。

これを図示すると，次図の太線部分になる。ただし，端点を含む。



〔別解〕

$w = a + bi$（a, b は実数で，$(a, b) \neq (0, 0)$）とおく。

$z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$ より，この z が点 β, β^2 を結ぶ線分上にある条件は

$$\frac{a}{a^2 + b^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq -\frac{b}{a^2 + b^2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，これを整理して

$$(a+1)^2 + b^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad -\sqrt{3} \leqq \frac{b}{a} \leqq \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow$ $(a+1)^2 + b^2 = 1$ かつ

〔「$a > 0$ かつ $-\sqrt{3}\,a \leqq b \leqq \sqrt{3}\,a$」または「$a < 0$ かつ $\sqrt{3}\,a \leqq b \leqq -\sqrt{3}\,a$」〕

[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 a_1a_n を， a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=-2+\sqrt{5}$ であるから

$$a_1=p-\frac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\left(-2+\sqrt{5}\right)=4$$

$$a_2=p^2+\left(-\frac{1}{p}\right)^2=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=18$$

(2) $-\dfrac{1}{p}=q$ とおくと $a_n=p^n+q^n$ であり

$$\begin{aligned} a_1a_n &= \left(p+q\right)\left(p^n+q^n\right) \\ &= p^{n+1}+q^{n+1}+pq\left(p^{n-1}+q^{n-1}\right) \\ &= p^{n+1}+q^{n+1}-\left(p^{n-1}+q^{n-1}\right) \\ &= a_{n+1}-a_{n-1} \end{aligned}$$

を得る。

(3) 数学的帰納法により示す。

（ⅰ） $n=1,\ 2$ のとき

(1)より $a_1,\ a_2$ は自然数である。

（ⅱ） $n=k-1,\ k$ （k≧2）のとき a_n が自然数であると仮定する。

このとき，(2)で得られた $a_1a_k=a_{k+1}-a_{k-1}$ より $a_{k+1}=a_1a_k+a_{k-1}=4a_k+a_{k-1}$

となるから， a_{k+1} は自然数である。

(ⅰ)，(ⅱ)より，すべての自然数 n に対して a_n は自然数である。

(4) n≧2 のとき $a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$ であり，ユークリッドの互除法により

a_{n+1} と a_n の最大公約数は， a_n と a_{n-1} の最大公約数に一致する。

したがって， a_{n+1} と a_n の最大公約数は $a_2=18$ と $a_1=4$ の最大公約数と同じなので 2

[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{5}$]

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 $C,\ D$ の共通接線について考える。

$C: y = x^2 + k$

$D: x = y^2 + k$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき， a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。

このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

---

(1) $\ell: y = ax + b$ とおく。

ℓ が $C: y = x^2 + k$ に接するとき，

$ax + b = x^2 + k \iff x^2 - ax + k - b = 0$ は重解をもつので

判別式を考えて $a^2 - 4(k - b) = 0$ …①

次に，ℓ が D に接するときを考える。

$a = 0$ のときは $\ell: y = b$ となって，D の接線にはならない。

したがって，$a \neq 0$ であるから $\ell: x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$ と表せる。

ℓ が D に接するとき，

$\dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a} = y^2 + k \iff ay^2 - y + ak + b = 0$ は重解をもつので

判別式を考えて $1 - 4a(ak + b) = 0$ …②

①より $k - b = \dfrac{a^2}{4}$ …①´

②より $ak + b = \dfrac{1}{4a}$ …②´

①´，②´より $(a+1)k = \dfrac{a^3 + 1}{4a}$

$a \neq -1$ であるから $k = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$ …③

したがって，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a} = \dfrac{(1-a)(1+a^2)}{4a}$ …④

(2) $a=2$ のとき，③より $k=\dfrac{3}{8}$ であり，このときの共通接線をすべて求める。

$a\neq -1$ であるものは，③より $\dfrac{3}{8}=\dfrac{a^2-a+1}{4a} \Leftrightarrow 2a^2-5a+2=0$

$\Leftrightarrow (a-2)(2a-1)=0$

よって $a=2,\ \dfrac{1}{2}$

④より $a=2$ のとき $b=-\dfrac{5}{8}$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $b=\dfrac{5}{16}$ である。

次に，$a=-1$ とすると，①´，②´はともに $k-b=\dfrac{1}{4}$ となり，$b=k-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

したがって，共通接線は 3 本存在して，その傾き a と切片 b は

$$(a,\ b)=\left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right),\ \left(-1,\ \frac{1}{8}\right)$$

[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{6}$]

点Oを原点とする座標空間内で，一辺の長さが1の正三角形OPQを動かす。また，A(1, 0, 0)に対して，∠AOPをθとおく。ただし$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$とする。

(1) 点Qが(0, 0, 1)にあるとき, 点Pのx座標がとりうる値の範囲と, θがとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点Qが平面$x=0$上を動くとき，辺OPが通過しうる範囲をKとする。Kの体積を求めよ。

---

(1) $\mathrm{P}(x, y, z)$とおく。

$\mathrm{Q}(0, 0, 1)$，$\mathrm{OP}=\mathrm{QP}=1$ より $x^2+y^2+z^2=1$ …①， $x^2+y^2+(1-z)^2=1$ …②

①，②より $z=\dfrac{1}{2}$ …③ であり， $x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ …④ を得る。

④より $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり,

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=x$ であるから $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ$

(2) (1)でOPが通過する範囲は, ③かつ④で表される円を底面とし，Oを頂点とする円錐の側面であり，これをLとする。

$\mathrm{OQ}=1$より，Qは円$y^2+z^2=1$，$x=0$上にある。

Qがx軸を中心としてこの円周上を動くとき，辺OPが通過する範囲もx軸を中心として回転する。

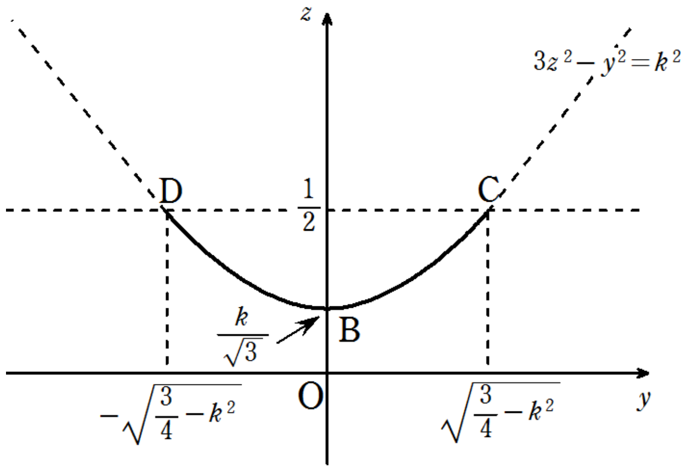
したがって，KはLをx軸の周りに回転して得られる立体である。

$z\left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$を固定すると$L$の切り口は，$(0, 0, z)$を中心とする半径$\sqrt{3}z$の円になり，

Lの方程式は $x^2+y^2=3z^2$ $\left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ である。

$x=k\left(0\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ におけるLの切り口は $3z^2-y^2=k^2$ $\left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ であり,

これは図のような双曲線（ただし，$k=0$ のときは 2 直線）の一部である。



$(k,\ 0,\ 0)$ からの距離の 2 乗の最小値は図の B における $\dfrac{k^2}{3}$，最大値は C, D における $1-k^2$ である。

よって，K の $x=k$ における切り口の面積は

$$\pi(1-k^2)-\pi\cdot\frac{k^2}{3}=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

であるから，求める体積は

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$