[東京大学 2017年前期 理科 $\boxed{6}$]

点Oを原点とする座標空間内で，一辺の長さが1の正三角形OPQを動かす。また，A(1, 0, 0)に対して，$\angle$AOPをθとおく。ただし$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$とする。

(1) 点Qが(0, 0, 1)にあるとき，点Pのx座標がとりうる値の範囲と，θがとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点Qが平面$x=0$上を動くとき，辺OPが通過しうる範囲をKとする。Kの体積を求めよ。

(1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおく。

$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{OP}=\mathrm{QP}=1$ より $x^2+y^2+z^2=1$ …①，$x^2+y^2+(1-z)^2=1$ …②

①，②より $z=\dfrac{1}{2}$ …③ であり，$x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$ …④ を得る。

④より $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=x$ であるから $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，$30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ$

(2) (1)でOPが通過する範囲は，③かつ④で表される円を底面とし，Oを頂点とする円錐の側面であり，これをLとする。

$\mathrm{OQ}=1$より，Qは円$y^2+z^2=1$，$x=0$上にある。

Qがx軸を中心としてこの円周上を動くとき，辺OPが通過する範囲もx軸を中心として回転する。

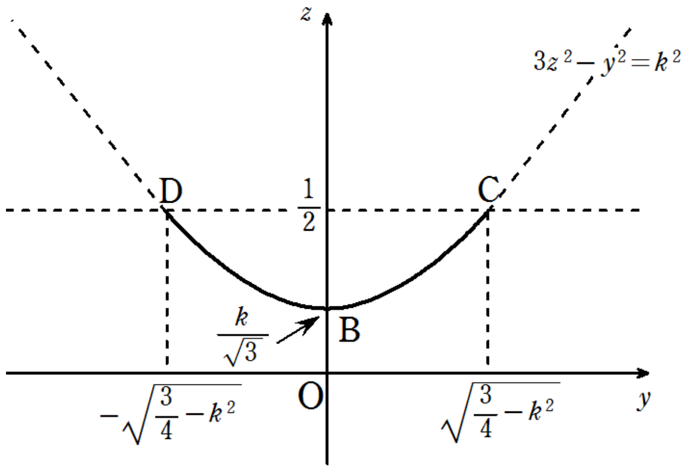
したがって，KはLをx軸の周りに回転して得られる立体である。

$z\left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$を固定すると$L$の切り口は，$(0,\ 0,\ z)$を中心とする半径$\sqrt{3}z$の円になり，

Lの方程式は $x^2+y^2=3z^2\ \left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ である。

$x=k\left(0\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ におけるLの切り口は $3z^2-y^2=k^2\ \left(0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ であり，

これは図のような双曲線（ただし，$k=0$ のときは 2 直線）の一部である。



$(k,\ 0,\ 0)$ からの距離の 2 乗の最小値は図の B における $\frac{k^2}{3}$，最大値は C, D における $1-k^2$ である。

よって，K の $x=k$ における切り口の面積は

$$\pi(1-k^2)-\pi\cdot\frac{k^2}{3}=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

であるから，求める体積は

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$