[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{5}$]

k を実数とし，座標平面上で次の２つの放物線 $C,\ D$ の共通接線について考える。

$C: y = x^2 + k$

$D: x = y^2 + k$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが２の共通接線が存在するように k の値を定める。

このとき，共通接線が３本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

(1) $\ell: y = ax + b$ とおく。

ℓ が $C: y = x^2 + k$ に接するとき，

$ax + b = x^2 + k \iff x^2 - ax + k - b = 0$ は重解をもつので

判別式を考えて $a^2 - 4(k - b) = 0$ …①

次に，ℓ が D に接するときを考える。

$a = 0$ のときは $\ell: y = b$ となって，D の接線にはならない。

したがって，$a \neq 0$ であるから $\ell: x = \dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a}$ と表せる。

ℓ が D に接するとき，

$\dfrac{1}{a}y - \dfrac{b}{a} = y^2 + k \iff ay^2 - y + ak + b = 0$ は重解をもつので

判別式を考えて $1 - 4a(ak + b) = 0$ …②

①より $k - b = \dfrac{a^2}{4}$ …①´

②より $ak + b = \dfrac{1}{4a}$ …②´

①´，②´ より $(a+1)k = \dfrac{a^3 + 1}{4a}$

$a \neq -1$ であるから $k = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$ …③

したがって，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a} = \dfrac{(1-a)(1+a^2)}{4a}$ …④

(2) $a=2$ のとき，③より $k=\dfrac{3}{8}$ であり，このときの共通接線をすべて求める。

$a\neq -1$ であるものは，③より $\dfrac{3}{8}=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$ $\Leftrightarrow$ $2a^2-5a+2=0$

$\Leftrightarrow$ $(a-2)(2a-1)=0$

よって $a=2,\ \dfrac{1}{2}$

④より $a=2$ のとき $b=-\dfrac{5}{8}$，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき $b=\dfrac{5}{16}$ である。

次に，$a=-1$ とすると，①´，②´はともに $k-b=\dfrac{1}{4}$ となり，$b=k-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

したがって，共通接線は 3 本存在して，その傾き a と切片 b は

$$(a,\ b)=\left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right),\ \left(-1,\ \frac{1}{8}\right)$$