[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) $a_1,\ a_2$ の値を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を， a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}=-2+\sqrt{5}$ であるから

$$a_1=p-\frac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\left(-2+\sqrt{5}\right)=4$$

$$a_2=p^2+\left(-\frac{1}{p}\right)^2=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=18$$

(2) $-\dfrac{1}{p}=q$ とおくと $a_n=p^n+q^n$ であり

$$\begin{aligned}a_1a_n&=\left(p+q\right)\left(p^n+q^n\right)\\&=p^{n+1}+q^{n+1}+pq\left(p^{n-1}+q^{n-1}\right)\\&=p^{n+1}+q^{n+1}-\left(p^{n-1}+q^{n-1}\right)\\&=a_{n+1}-a_{n-1}\end{aligned}$$

を得る。

(3) 数学的帰納法により示す。

（ｉ）$n=1,\ 2$ のとき

(1)より $a_1,\ a_2$ は自然数である。

（ⅱ）$n=k-1,\ k$ （k≧2）のとき a_n が自然数であると仮定する。

このとき，(2)で得られた $a_1a_k=a_{k+1}-a_{k-1}$ より $a_{k+1}=a_1a_k+a_{k-1}=4a_k+a_{k-1}$

となるから，a_{k+1} は自然数である。

(ｉ)，(ⅱ)より，すべての自然数 n に対して a_n は自然数である。

(4) n≧2 のとき $a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$ であり，ユークリッドの互除法により

a_{n+1} と a_n の最大公約数は，a_n と a_{n-1} の最大公約数に一致する。

したがって，a_{n+1} と a_n の最大公約数は $a_2=18$ と $a_1=4$ の最大公約数と同じなので 2