[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{3}$]

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。

点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる。

この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

---

(1) L は，点 α と O から等距離にある点の集合なので，$|z-\alpha|=|z|$ が成り立つ。

ここで，$w=\dfrac{1}{z}$ より $w\neq 0$ であり，このもとで

$$w=\frac{1}{z} \iff z=\frac{1}{w}$$

である。したがって

点 w（$\neq 0$）が求める軌跡上にある

$\iff$ $z=\dfrac{1}{w}$ が L 上にある

$$\iff \left|\frac{1}{w}-\alpha\right|=\left|\frac{1}{w}\right|$$

$$\iff |1-\alpha w|=1$$

$$\iff \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}\quad (\because \alpha\neq 0)$$

となるから，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円から 1 点 O を除いたものである。

(2) $x^3-1=0$ とすると

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であるから

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad \beta^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

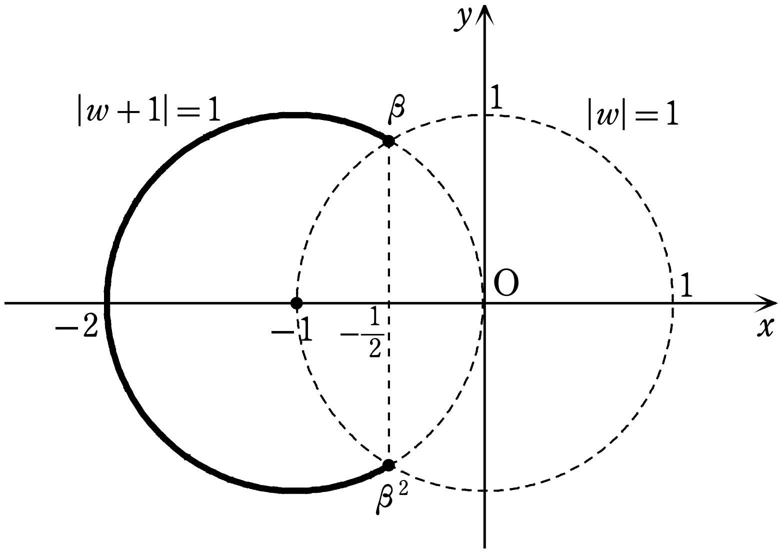
である。

この 2 点を結ぶ線分は，点 -1 と O を結ぶ線分の垂直二等分線のうち，$|z| \leqq 1$ を満たす部分である。

よって，(1)の結果において，$\alpha = -1$ とした「中心 -1，半径1の円から 1 点 O を除いたもの」のうち，

$|z| \leqq 1$ すなわち $|w| \geqq 1$ を満たす部分である。

これを図示すると，次図の太線部分になる。ただし，端点を含む。



〔別解〕

$w = a + bi$（a, b は実数で，$(a, b) \neq (0, 0)$）とおく。

$z = \dfrac{1}{w} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$ より，この z が点 β, β^2 を結ぶ線分上にある条件は

$$\frac{a}{a^2+b^2} = -\frac{1}{2} \quad かつ \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq -\frac{b}{a^2+b^2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから，これを整理して

$$(a+1)^2 + b^2 = 1 \quad かつ \quad -\sqrt{3} \leqq \frac{b}{a} \leqq \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \quad (a+1)^2 + b^2 = 1$ かつ

〔「$a > 0$ かつ $-\sqrt{3}a \leqq b \leqq \sqrt{3}a$」または「$a < 0$ かつ $\sqrt{3}a \leqq b \leqq -\sqrt{3}a$」〕