[東京大学 2017 年前期 理科 $\boxed{1}$]

実数 a, b に対して

$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。

また，条件を満たす点 (a, b) が描く図形を座標平面上に図示せよ。

(1) $f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$

$$=-3\cos\theta+4\cos^3\theta+a\left(2\cos^2\theta-1\right)+b\cos\theta$$

$$=-3x+4x^3+a(2x^2-1)+bx$$

$$=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a$$

ここで，$f(0)=1+a+b$ であり，$\theta=0$ すなわち $x=1$ のとき $f(\theta)-f(0)=0$ となるから

$$f(\theta)-f(0)=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a-(1+a+b)$$

$$=4x^3+2ax^2+(b-3)x-(2a+b+1)$$

$$=(x-1)\{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1\}$$

となる。

したがって

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

$$=\frac{(x-1)\{4x^2+2(a+2)x+2a+b+1\}}{x-1}$$

$$=4x^2+2(a+2)x+2a+b+1$$

を得る。

（2） $g(\theta)=4\left(x+\dfrac{a+2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a+2)^2+2a+b+1$

$$=4\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a+b$$

である。

$g(\theta)$の $0<\theta<\pi$ すなわち $-1<x<1$ における最小値は

$-1<-\dfrac{a+2}{2}<1$ のとき　$-\dfrac{1}{4}a^2+a+b$

それ以外のとき　存在しない

となる。

よって，$g(\theta)$が$0<\theta<\pi$の範囲で最小値0をとるための$a,\ b$についての条件は

$-1<-\dfrac{a+2}{2}<1$ かつ $-\dfrac{1}{4}a^2+a+b=0$

したがって

$b=\dfrac{1}{4}a^2-a$　（$-6<a<2$）

となり，これを図示する次の図の太線部分になる。ただし，端点は含まない。