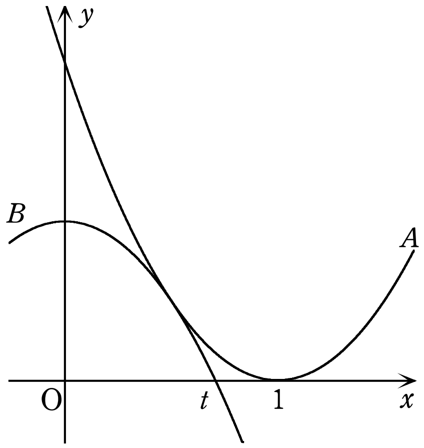
[東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面において２つの放物線 $A: y = s(x-1)^2$ と $B: y = -x^2 + t^2$ を考える。ただし，$s,\ t$ は実数で，$0 < s,\ 0 < t < 1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ1点を共有するとき，$\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ の最大値を求めよ。



$$\mathrm{P} = \int_0^1 s(x-1)^2\,dx = \left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{s}{3}$$

$$\mathrm{Q} = \int_0^t (-x^2 + t^2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + t^2 x\right]_0^t = \frac{2}{3}t^3$$

であるから

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{s}{3}} = \frac{2t^3}{s}$$

ここで，A と B がただ1点を共有することから，２次方程式

$$s(x-1)^2 = -x^2 + t^2 \iff (s+1)x^2 - 2sx + s - t^2 = 0 \quad \cdots①$$

は重解をもつ。①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = s^2 - (s+1)(s-t^2) = st^2 - s + t^2$$

であり，このとき $D = 0$ であるから

$$st^2 - s + t^2 = 0 \iff s(1-t^2) = t^2$$

$0 < t < 1$ より $1 - t^2 > 0$ であり，$s = \dfrac{t^2}{1-t^2}$

したがって

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}} = \frac{2t^3}{s} = \frac{2t^3}{\frac{t^2}{1-t^2}} = 2t(1-t^2) = -2t^3 + 2t$$

となる。

$f(t)=-2t^3+2t$　とおくと　$f'(t)=-6t^2+2=-2(3t^2-1)$

であり，　$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	（0）	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	（1）
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

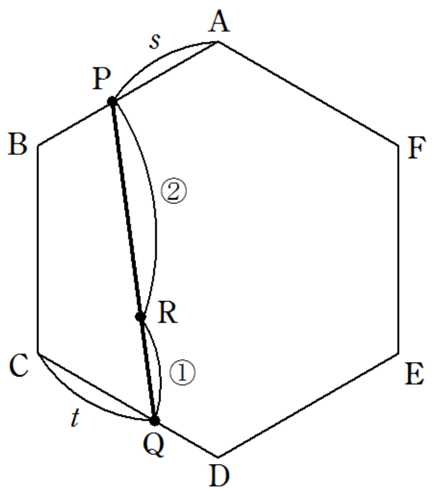
したがって，　$f(t)$ は　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　のときに最大値をとり，

求める最大値は　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

[東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{2}$]

1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている。点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを2:1に内分する点Rが通りうる範囲の面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\vec{y}$ とおく。



また，$\overrightarrow{AP}=s\vec{x}$, $\overrightarrow{CQ}=t\vec{y}$（$0\leqq s\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$）とする。

このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}&=\frac{1\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}}{3}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}\right)\\&=\frac{1}{3}s\vec{x}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+t\vec{y}\right)\\&=s\cdot\frac{1}{3}\vec{x}+t\cdot\frac{2}{3}\vec{y}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

であり，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ は定まったベクトルであるから，点Rが通り得る範囲の面積は

$0\leqq s\leqq1$，$0\leqq t\leqq1$ より $\dfrac{1}{3}\vec{x}$ と $\dfrac{2}{3}\vec{y}$ の張る平行四辺形の面積と等しい。

$\angle BAF=120^\circ$ であるから，その面積は

$$\left|\frac{1}{3}\vec{x}\right|\left|\frac{2}{3}\vec{y}\right|\sin120^\circ=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

[東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則（a），に（b）従って動く点 P を考える。

（a）最初に，点 P は原点 O にある。

（b）ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点 P の位置は，

隣接する格子点 $(m+1,\ n),\ (m,\ n+1),\ (m-1,\ n),\ (m,\ n-1)$ のいずれかであり，

また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

（1）最初から1秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

（2）点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

（1）1秒後の点 P の座標は $(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (-1,\ 0),\ (0,\ -1)$ であり，これらの起こりやすさは同様に確からしい。そして，$t-s=-1$ となるのは，$(1,\ 0),\ (0,\ -1)$ の 2 つの場合である。

よって，求める確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

（2）①：$(m,\ n)\to(m+1,\ n)$

②：$(m,\ n)\to(m,\ n+1)$

③：$(m,\ n)\to(m-1,\ n)$

④：$(m,\ n)\to(m,\ n-1)$

点 P が最初から 6 秒後に直線 $y=x$ にあるのは，

①または②が３回，③または④が３回起こるときである。

①または②が起こる確率は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，③または④が起こる確率は $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

であるから，求める確率は ${}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

[東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{4}$]

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1, a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を， a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

(1) $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = -2+\sqrt{5}$ であるから

$$a_1 = p - \frac{1}{p} = 2+\sqrt{5} - \left(-2+\sqrt{5}\right) = 4$$

$$a_2 = p^2 + \left(-\frac{1}{p}\right)^2 = \left(p-\frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

(2) $-\dfrac{1}{p} = q$ とおくと $a_n = p^n + q^n$ であり

$$a_1 a_n = \left(p+q\right)\left(p^n + q^n\right)$$

$$= p^{n+1} + q^{n+1} + pq\left(p^{n-1} + q^{n-1}\right)$$

$$= p^{n+1} + q^{n+1} - \left(p^{n-1} + q^{n-1}\right)$$

$$= a_{n+1} - a_{n-1}$$

を得る。

(3) 数学的帰納法により示す。

（ｉ）$n=1,\ 2$ のとき

(1)より $a_1,\ a_2$ は自然数である。

（ⅱ）$n=k-1,\ k$ （k≧2）のとき a_n が自然数であると仮定する。

このとき，(2)で得られた $a_1a_k=a_{k+1}-a_{k-1}$ より $a_{k+1}=a_1a_k+a_{k-1}=4a_k+a_{k-1}$

となるから， a_{k+1} は自然数である。

（ｉ），（ⅱ）より，すべての自然数 n に対して a_n は自然数である。

(4) n≧2 のとき $a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}$ であり，ユークリッドの互除法により

a_{n+1} と a_n の最大公約数は， a_n と a_{n-1} の最大公約数に一致する。

したがって， a_{n+1} と a_n の最大公約数は $a_2=18$ と $a_1=4$ の最大公約数と同じなので 2