

[ 東京大学 2017 年前期 文科 4 ]



$p = 2 + \sqrt{5}$  とおき, 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

- (1)  $a_1, a_2$  の値を求めよ。
- (2)  $n \geq 2$  とする。積  $a_1 a_n$  を,  $a_{n+1}$  と  $a_{n-1}$  を用いて表せ。
- (3)  $a_n$  は自然数であることを示せ。

を点  $z$  が動くときの点  $w$  の軌跡を求め, 複素数平面上に図示せよ。



$$(1) \frac{1}{p} = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \cdot \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = -2 + \sqrt{5} \text{ であるから}$$

$$a_1 = p - \frac{1}{p} = 2 + \sqrt{5} - (-2 + \sqrt{5}) = 4$$

$$a_2 = p^2 + \left(-\frac{1}{p}\right)^2 = \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$$

$$(2) -\frac{1}{p} = q \text{ とおくと } a_n = p^n + q^n \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} a_1 a_n &= (p + q)(p^n + q^n) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} + pq(p^{n-1} + q^{n-1}) \\ &= p^{n+1} + q^{n+1} - (p^{n-1} + q^{n-1}) \\ &= a_{n+1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

を得る。

(3) 数学的帰納法により示す。

(i)  $n=1, 2$  のとき

(1)より  $a_1, a_2$  は自然数である。

(ii)  $n=k-1, k$  ( $k \geq 2$ ) のとき  $a_n$  が自然数であると仮定する。

このとき、(2)で得られた  $a_1 a_k = a_{k+1} - a_{k-1}$  より  $a_{k+1} = a_1 a_k + a_{k-1} = 4a_k + a_{k-1}$

となるから、 $a_{k+1}$  は自然数である。

(i), (ii)より、すべての自然数  $n$  に対して  $a_n$  は自然数である。

(4)  $n \geq 2$  のとき  $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$  であり、ユークリッドの互除法により

$a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数は、 $a_n$  と  $a_{n-1}$  の最大公約数に一致する。

したがって、 $a_{n+1}$  と  $a_n$  の最大公約数は  $a_2 = 18$  と  $a_1 = 4$  の最大公約数と同じなので 2