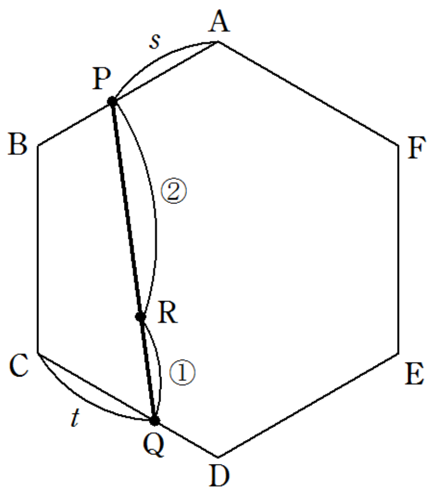
［ 東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{2}$ ］

1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている。点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを2:1に内分する点Rが通りうる範囲の面積を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{x}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}=\vec{y}$ とおく。

また，$\overrightarrow{AP}=s\vec{x}$，$\overrightarrow{CQ}=t\vec{y}$（$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$）とする。



このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR}&=\frac{1\cdot\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AQ}}{3}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}\right)\\&=\frac{1}{3}s\vec{x}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+t\vec{y}\right)\\&=s\cdot\frac{1}{3}\vec{x}+t\cdot\frac{2}{3}\vec{y}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

であり，$\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ は定まったベクトルであるから，点Rが通り得る範囲の面積は

$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より $\frac{1}{3}\vec{x}$ と $\frac{2}{3}\vec{y}$ の張る平行四辺形の面積と等しい。

$\angle BAF=120^\circ$ であるから，その面積は

$$\left|\frac{1}{3}\vec{x}\right|\left|\frac{2}{3}\vec{y}\right|\sin 120^\circ=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$