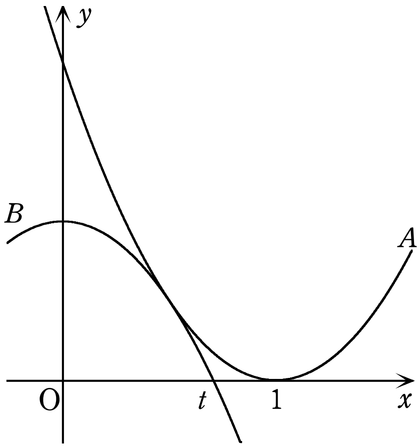
[東京大学 2017 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面において2つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし，$s,\ t$ は実数で，$0<s$, $0<t<1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ1点を共有するとき，$\dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$ の最大値を求めよ。



$$\mathrm{P}=\int_0^1 s(x-1)^2\,dx=\left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

$$\mathrm{Q}=\int_0^t (-x^2+t^2)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+t^2x\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3$$

であるから

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}=\frac{\frac{2}{3}t^3}{\frac{s}{3}}=\frac{2t^3}{s}$$

ここで，A と B がただ1点を共有することから，２次方程式

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2 \iff (s+1)x^2-2sx+s-t^2=0 \quad \cdots ①$$

は重解をもつ。①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=s^2-(s+1)(s-t^2)=st^2-s+t^2$$

であり，このとき $D=0$ であるから

$$st^2-s+t^2=0 \iff s(1-t^2)=t^2$$

$0<t<1$ より $1-t^2>0$ であり，$s=\dfrac{t^2}{1-t^2}$

したがって

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}=\frac{2t^3}{s}=\frac{2t^3}{\frac{t^2}{1-t^2}}=2t(1-t^2)=-2t^3+2t$$

となる。

$f(t)=-2t^3+2t$ とおくと $f'(t)=-6t^2+2=-2(3t^2-1)$

であり， $f(t)$ の増減は下表に従う。

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

したがって， $f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときに最大値をとり，

求める最大値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$