[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{1}$]

e を自然対数の底，すなわち $e=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$x>0$ とする。

$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$， $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ とおく。

$f(x)<e<g(x)$ であることを示す。

$\log f(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ であるから，両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

ここで， $p(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと

$p'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=-\dfrac{1}{x(x+1)^2}<0$ であるから $p(x)$ は単調減少であり，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$ であることと合わせて $p(x)>0$

よって， $f'(x)=p(x)f(x)>0$ であるから $f(x)$ は単調増加である。

したがって， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ であることと合わせて $f(x)<e$ を得る。

次に， $\log g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ であるから，両辺を微分して

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

ここで，$q(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}$ とおくと

$q'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot x(x+1)-(2x+1)\cdot(2x+1)}{\{x(x+1)\}^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$ であるから

$q(x)$ は単調増加であり，$\lim_{x\to\infty}q(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}\right\}=0$

であることと合わせて $q(x)<0$

よって，$g'(x)=q(x)g(x)<0$ であるから $g(x)$ は単調減少である。

したがって，$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=e$ であることと合わせて $g(x)>e$ を得る。

以上から $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ が示された。

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{2}$]

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方法で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

（a）1 試合目で A と B が対戦する。

（b）2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

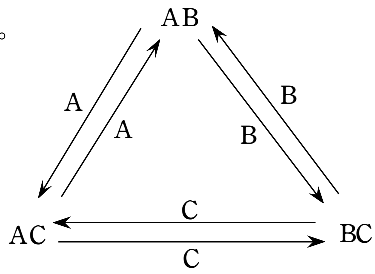
（c）k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

(1) 各試合の勝者と，どの 2 チームが対戦するかは，図のように推移する。



1 試合目で A が勝つと反時計回り，B が勝つと時計回りにこの図を回り始めるが，大会が終了するのは，あるチームが初めて 2 連勝した時点，すなわち図を逆向きに回った時点である。

A が優勝するのは次の場合である。

（ⅰ）$3k$ 回（k は正の整数）時計回りに回った後，A と B の試合で A が勝つ場合

（ⅱ）$3k+1$ 回（k は 0 以上の整数）反時計回りに回った後，A と C の試合で A が勝つ場合

（ⅰ）の総試合数は $3k+1$，（ⅱ）の総試合数は $3k+2$ であり，どちらの場合も各試合での勝敗は 1 通りに決まる。よって，$n \geqq 2$ のもとで，求める確率は

n が 3 の倍数のとき 0，それ以外のとき $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下なので，（ⅰ）（ⅱ）の k は $k \leqq m-1$ をみたす。

総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する事象を D，A の最後の対戦相手が B である事象を E とおく。

求める条件付き確率は $P_D(E)=\dfrac{P(D\cap E)}{P(D)}$ である。

$P(D\cap E)$ は(ⅰ)の確率の合計であるから

$$m\geqq 2 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

これは $m=1$ でも成り立っている。

また，$P(D)$ は，$P(D\cap E)$ に(ⅱ)の確率の合計を加えたものであり，

$$\text{(ⅱ)の確率の合計は } \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}$$

よって

$$P(D)=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}+\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}$$

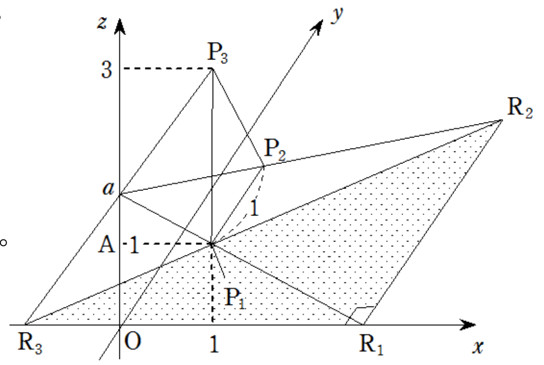
$$=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}$$

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{3}$]

a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $P_1(1,\ 0,\ 1)$, $P_2(1,\ 1,\ 1)$, $P_3(1,\ 0,\ 3)$, $Q(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 P_1Q, P_2Q, P_3Q と xy 平面の交点を R_1, R_2, R_3 として，三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。



P_1, P_3, Q は xz 平面上にあるので， R_1, R_3 は x 軸上の点である。

xz 平面上で，直線 P_1Q, P_3Q の方程式はそれぞれ

$z=(1-a)x+a$，　$z=(3-a)x+a$　となるから，

$z=0$ として R_1, R_3 の x 座標はそれぞれ $\dfrac{a}{a-1}$, $\dfrac{a}{a-3}$ である。

よって， $R_1R_3=\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a-3}=\dfrac{-2a}{(a-1)(a-3)}$

また， P_1P_2 は y 軸に平行であるから， R_1R_2 も y 軸に平行であり，

$O(0,\ 0,\ 0)$，　$A(0,\ 0,\ 1)$ として

$$R_1R_2=\frac{QR_1}{QP_1}\cdot P_1P_2=\frac{QO}{QA}\cdot 1=\frac{a}{a-1}$$

となる。

$\angle R_2R_1R_3=90^\circ$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot R_1R_2\cdot R_1R_3=\frac{-a^2}{(a-1)^2(a-3)}$$　となる。

$$S'(a)=\frac{-2a\cdot(a-1)^2(a-3)+a^2\{2(a-1)(a-3)+(a-1)^2\}}{\{(a-1)^2(a-3)\}^2}$$

$$=\frac{-2a(a-1)(a-3)+a^2(3a-7)}{(a-1)^3(a-3)^2}=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(a-3)^2}=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(a-3)^2}$$

より， $S(a)$ の増減は下表に従う。

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	4	↗	

したがって

　$S(a)$ は $a=2$ のとき最小値 4 をとる。

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{4}$]

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1),\ \mathrm{B}(z),\ \mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

$\mathrm{A}(1),\ \mathrm{B}(z),\ \mathrm{C}(z^2)$ が相異なる点であることから $z \neq 1,\ z^2 \neq 1,\ z^2 \neq z$ すなわち $z \neq 0,\ \pm 1$ …①

このもとで，$\mathrm{AB} = |z-1|$，$\mathrm{BC} = |z^2 - z| = |z||z-1|$，$\mathrm{CA} = |z^2 - 1| = |z+1||z-1|$ であり，

①より $|z-1| \neq 0$ であるから $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 1 : |z| : |z+1|$ が成り立つ。

ここで，$0^\circ \leqq \angle\mathrm{A} < 90^\circ \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + |z+1|^2 - |z^2| > 0$ …②であり，

同様にして $0^\circ \leqq \angle\mathrm{B} < 90^\circ \Leftrightarrow 1 + |z^2| - |z+1|^2 > 0$ …③

$0^\circ \leqq \angle\mathrm{C} < 90^\circ \Leftrightarrow |z^2| + |z+1|^2 - 1 > 0$ …④

である。逆に，これらをすべてみたすとき

$0^\circ < \angle\mathrm{A} < 90^\circ,\ 0^\circ < \angle\mathrm{B} < 90^\circ,\ 0^\circ < \angle\mathrm{C} < 90^\circ$ となり，3 点 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ は鋭角三角形をなす。

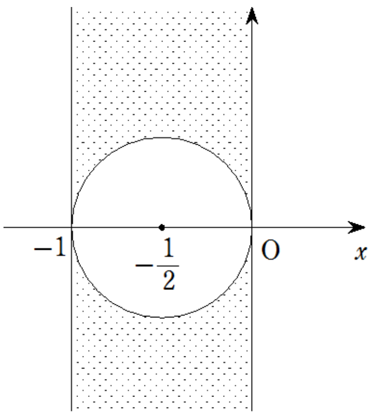
$z = x + yi$（$x,\ y$ は実数）とおくと，

② $\Leftrightarrow 1 + \{(x+1)^2 + y^2\} - (x^2 + y^2) > 0$ よって $x > -1$

③ $\Leftrightarrow 1 + (x^2 + y^2) - \{(x+1)^2 + y^2\} > 0$ よって $x < 0$

④ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2) + \{(x+1)^2 + y^2\} - 1 > 0$ よって $x^2 + x + y^2 > 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

以上を図示すると，次の図の打点部分になる。ただし，境界は含まない。



[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{5}$]

k を正の整数とし、10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

$\alpha=0.a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，$0<\alpha\leqq 0.\underbrace{99\cdots 9}_{k個}=1-10^{-k}$ …①が成り立つ。$a_k\neq 0$ より $\alpha>0$ である。

(1) 題意の不等式より $\alpha\leqq\sqrt{n}-10^k<\alpha+10^{-k}$ ⇔ $10^k+\alpha\leqq\sqrt{n}<10^k+\alpha+10^{-k}$

⇔ $10^k+\alpha\leqq\sqrt{n}<10^k+(\alpha+10^{-k})$

両辺を 2 乗して $10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+\alpha^2\leqq n<10^{2k}+2(\alpha+10^{-k})+(\alpha+10^{-k})^2$ …②

①より $0<\alpha^2<1$，$0<(\alpha+10^{-k})^2\leqq 1$ であることから

②をみたす正の整数 n は $10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+1,\ 10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+2$

すなわち $10^{2k}+2\cdot a_1a_2\cdots a_k+1,\ 10^{2k}+2\cdot a_1a_2\cdots a_k+2$ である。

（ただし，$a_1a_2\cdots a_k$ とは $a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_k$ で表される整数）

(2) $p+\alpha\leqq\sqrt{m}<p+\alpha+10^{-k}$ より $(p+\alpha)^2\leqq m<(p+\alpha+10^{-k})^2$ …③

$p\geqq 5\cdot 10^{k-1}$，$\alpha>0$ より

$(p+\alpha+10^{-k})^2-p+\alpha=2(p+\alpha)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}>2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k}=1$

であるから，③をみたす正の整数 m が存在する。

(3) 正の整数sに対し，$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right]=\alpha$ すなわち $\sqrt{s}=\left[\sqrt{s}\right]+\alpha$ …④ が成り立つとする。

このとき，$\left[\sqrt{s}\right]$は整数，αは整数ではない有理数であるから

$\sqrt{s}=\dfrac{y}{x}$（$x,\ y$は互いに素な整数，$x \geqq 2$）

とおける。

よって $ax^2=y^2$ を得るが，xの素因数の１つをqとすると，

$x,\ y$は互いに素なので，右辺はqの倍数ではなく矛盾する。

よって，題意の正の整数sは存在しない。

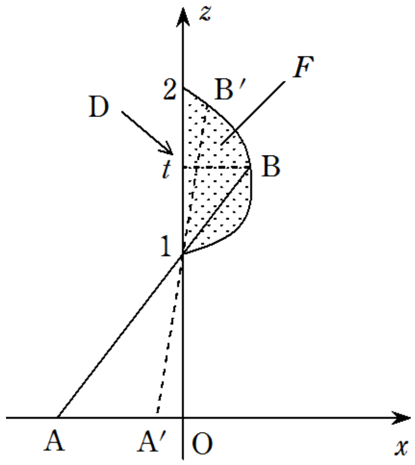
[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a)，(b)をみたしながら動く。

(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b) 点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することが出来る範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。



A が x 軸の $x \leqq 0$ の部分にあるとして，xz 平面上で考える。

このときの線分 AB の通過範囲のうち，$z \geqq 1$ にある部分を F とする。

考える立体は，F を z 軸の周りに 1 回転して得られるものである。

F の $z=t$（$1 \leqq t \leqq 2$）における切り口を考える。

B の z 座標が t 以上 2 以下であるときに線分 AB と $z=t$ は交点をもち，

B の z 座標がこの範囲で増加すると，交点の x 座標は 0 まで減少する。

したがって，F は B の軌跡と z 軸で囲まれる領域である。

$\mathrm{B}(b,\ 0,\ t)$，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ t)$ とおくと，$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OC}:\mathrm{CD}=1:(t-1)$

であるから，$\mathrm{BC}=2\cdot\dfrac{t-1}{1+(t-1)}=\dfrac{2(t-1)}{t}$ となり，

$b^2=\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2=\dfrac{4(t-1)^2}{t^2}-(t-1)^2=\dfrac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}$ を得る。

よって，K の平面 $z=t$（$1 \leqq t \leqq 2$）における切り口の面積は $\pi\cdot\dfrac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}$ であるから

求める体積は

$$\int_1^2 \pi\cdot\frac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}\,dt=\pi\int_1^2\left(-t^2+2t+3-\frac{8}{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+3t-8\log t-\frac{4}{t}\right]_1^2$$

$$=\pi\left(-\frac{7}{3}+3+3-8\log 2+2\right)$$

$$=\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)$$