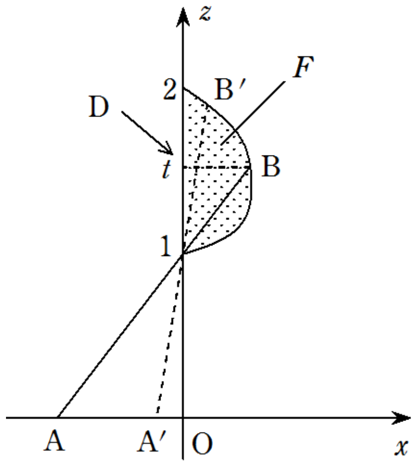
［ 東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件（a），（b）をみたしながら動く。

（a）点 A は平面 $z=0$ 上にある。

（b）点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することが出来る範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。



A が x 軸の $x \leqq 0$ の部分にあるとして，xz 平面上で考える。

このときの線分 AB の通過範囲のうち，$z \geqq 1$ にある部分を F とする。

考える立体は，F を z 軸の周りに 1 回転して得られるものである。

F の $z=t$（$1 \leqq t \leqq 2$）における切り口を考える。

B の z 座標が t 以上 2 以下であるときに線分 AB と $z=t$ は交点をもち，

B の z 座標がこの範囲で増加すると，交点の x 座標は 0 まで減少する。

したがって，F は B の軌跡と z 軸で囲まれる領域である。

$\mathrm{B}(b,\ 0,\ t)$，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ t)$ とおくと，$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=\mathrm{OC}:\mathrm{CD}=1:(t-1)$

であるから，$\mathrm{BC}=2\cdot\dfrac{t-1}{1+(t-1)}=\dfrac{2(t-1)}{t}$ となり，

$b^2=\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{CD}^2=\dfrac{4(t-1)^2}{t^2}-(t-1)^2=\dfrac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}$ を得る。

よって，K の平面 $z=t$（$1 \leqq t \leqq 2$）における切り口の面積は $\pi\cdot\dfrac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}$ であるから

求める体積は
$$\int_1^2 \pi\cdot\frac{(t-1)^2(4-t^2)}{t^2}\,dt=\pi\int_1^2\left(-t^2+2t+3-\frac{8}{t}+\frac{4}{t^2}\right)dt$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2+3t-8\log t-\frac{4}{t}\right]_1^2$$
$$=\pi\left(-\frac{7}{3}+3+3-8\log 2+2\right)$$
$$=\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)$$