[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{5}$]

k を正の整数とし、10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

$\alpha = 0.a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，$0<\alpha \leqq 0.\underbrace{99\cdots9}_{k個} = 1-10^{-k}$ …①が成り立つ。$a_k \neq 0$ より $\alpha > 0$ である。

(1) 題意の不等式より $\alpha \leqq \sqrt{n}-10^k < \alpha+10^{-k} \iff 10^k+\alpha \leqq \sqrt{n} < 10^k+\alpha+10^{-k}$

$$\iff 10^k+\alpha \leqq \sqrt{n} < 10^k+(\alpha+10^{-k})$$

両辺を 2 乗して $10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+\alpha^2 \leqq n < 10^{2k}+2(\alpha+10^{-k})+(\alpha+10^{-k})^2$ …②

①より $0<\alpha^2<1$，$0<(\alpha+10^{-k})^2 \leqq 1$ であることから

②をみたす正の整数 n は $10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+1,\ 10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+2$

すなわち $10^{2k}+2\cdot a_1a_2\cdots a_k+1,\ 10^{2k}+2\cdot a_1a_2\cdots a_k+2$ である。

（ただし，$a_1a_2\cdots a_k$ とは $a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_k$ で表される整数）

(2) $p+\alpha \leqq \sqrt{m} < p+\alpha+10^{-k}$ より $(p+\alpha)^2 \leqq m < (p+\alpha+10^{-k})^2$ …③

$p \geqq 5\cdot 10^{k-1}$，$\alpha>0$ より

$(p+\alpha+10^{-k})^2-p+\alpha = 2(p+\alpha)\cdot 10^{-k}+10^{-2k} > 2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k} = 1$

であるから，③をみたす正の整数 m が存在する。

(3) 正の整数 s に対し，$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right]=\alpha$ すなわち $\sqrt{s}=\left[\sqrt{s}\right]+\alpha$ …④ が成り立つとする。

このとき，$\left[\sqrt{s}\right]$ は整数，α は整数ではない有理数であるから

$\sqrt{s}=\dfrac{y}{x}$（$x,\ y$ は互いに素な整数，$x \geqq 2$）

とおける。

よって $ax^2=y^2$ を得るが，x の素因数の 1 つを q とすると，

$x,\ y$ は互いに素なので，右辺は q の倍数ではなく矛盾する。

よって，題意の正の整数 s は存在しない。