[ 東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{5}$ ]

$k$ を正の整数とし、10 進法で表された小数点以下 $k$ 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 $n$ をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) $p$ が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 $m$ が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 $x$ に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 $r$ を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 $s$ は存在しないことを示せ。