## [ 東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{4}$ ]

$z$ を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1),\ \mathrm{B}(z),\ \mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような $z$ の範囲を求め，図示せよ。

---

$\mathrm{A}(1),\ \mathrm{B}(z),\ \mathrm{C}(z^2)$ が相異なる点であることから $z\neq 1,\ z^2\neq 1,\ z^2\neq z$ すなわち $z\neq 0,\ \pm 1$ …①

このもとで，$\mathrm{AB}=|z-1|$，$\mathrm{BC}=|z^2-z|=|z||z-1|$，$\mathrm{CA}=|z^2-1|=|z+1||z-1|$ であり，

①より $|z-1|\neq 0$ であるから $\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=1:|z|:|z+1|$ が成り立つ。

ここで，$0^\circ\leqq\angle\mathrm{A}<90^\circ \iff \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2>0 \iff 1+|z+1|^2-|z^2|>0$ …②であり，

同様にして $0^\circ\leqq\angle\mathrm{B}<90^\circ \iff 1+|z^2|-|z+1|^2>0$ …③

$0^\circ\leqq\angle\mathrm{C}<90^\circ \iff |z^2|+|z+1|^2-1>0$ …④

である。逆に，これらをすべてみたすとき

$0^\circ<\angle\mathrm{A}<90^\circ,\ 0^\circ<\angle\mathrm{B}<90^\circ,\ 0^\circ<\angle\mathrm{C}<90^\circ$ となり，3 点 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ は鋭角三角形をなす。

$z=x+yi$（$x,\ y$ は実数）とおくと，

② $\iff 1+\{(x+1)^2+y^2\}-(x^2+y^2)>0$ よって $x>-1$

③ $\iff 1+(x^2+y^2)-\{(x+1)^2+y^2\}>0$ よって $x<0$

④ $\iff (x^2+y^2)+\{(x+1)^2+y^2\}-1>0$ よって $x^2+x+y^2>0 \iff \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

以上を図示すると，次の図の打点部分になる。ただし，境界は含まない。