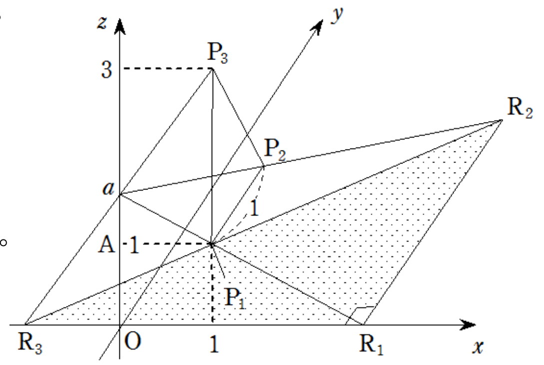
[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{3}$]

a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,0,1)$, $\mathrm{P}_2(1,1,1)$, $\mathrm{P}_3(1,0,3)$, $\mathrm{Q}(0,0,a)$ を考える。直線 $\mathrm{P_1Q}$, $\mathrm{P_2Q}$, $\mathrm{P_3Q}$ と xy 平面の交点を R_1, R_2, R_3 として，三角形 $\mathrm{R_1R_2R_3}$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。



P_1, P_3, Q は xz 平面上にあるので，R_1, R_3 は x 軸上の点である。

xz 平面上で，直線 $\mathrm{P_1Q}$, $\mathrm{P_3Q}$ の方程式はそれぞれ

$z=(1-a)x+a$，$z=(3-a)x+a$ となるから，

$z=0$ として R_1, R_3 の x 座標はそれぞれ $\dfrac{a}{a-1}$，$\dfrac{a}{a-3}$ である。

よって，$\mathrm{R_1R_3}=\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a}{a-3}=\dfrac{-2a}{(a-1)(a-3)}$

また，$\mathrm{P_1P_2}$ は y 軸に平行であるから，$\mathrm{R_1R_2}$ も y 軸に平行であり，

$\mathrm{O}(0,0,0)$，$\mathrm{A}(0,0,1)$ として

$$\mathrm{R_1R_2}=\frac{\mathrm{QR_1}}{\mathrm{QP_1}}\cdot\mathrm{P_1P_2}=\frac{\mathrm{QO}}{\mathrm{QA}}\cdot 1=\frac{a}{a-1}$$

となる。

$\angle\mathrm{R_2R_1R_3}=90^\circ$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{R_1R_2}\cdot\mathrm{R_1R_3}=\frac{-a^2}{(a-1)^2(a-3)}$$ となる。

$$S'(a)=\frac{-2a\cdot(a-1)^2(a-3)+a^2\{2(a-1)(a-3)+(a-1)^2\}}{\{(a-1)^2(a-3)\}^2}$$

$$=\frac{-2a(a-1)(a-3)+a^2(3a-7)}{(a-1)^3(a-3)^2}=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(a-3)^2}=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(a-3)^2}$$

より，$S(a)$ の増減は下表に従う。

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	4	↗	

したがって

$S(a)$ は $a=2$ のとき最小値 4 をとる。