[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{2}$]

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方法で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

（a）1 試合目で A と B が対戦する。

（b）2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

（c）k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

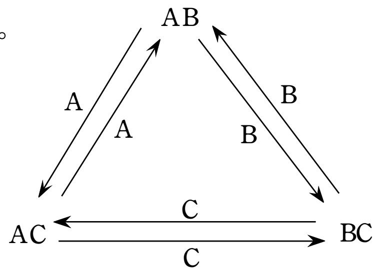
なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

---

(1) 各試合の勝者と，どの 2 チームが対戦するかは，図のように推移する。



1 試合目で A が勝つと反時計回り，B が勝つと時計回りにこの図を回り始めるが，大会が終了するのは，あるチームが初めて 2 連勝した時点，すなわち図を逆向きに回った時点である。

A が優勝するのは次の場合である。

(ⅰ) $3k$ 回（k は正の整数）時計回りに回った後，A と B の試合で A が勝つ場合

(ⅱ) $3k+1$ 回（k は 0 以上の整数）反時計回りに回った後，A と C の試合で A が勝つ場合

(ⅰ)の総試合数は $3k+1$，(ⅱ)の総試合数は $3k+2$ であり，どちらの場合も各試合での勝敗は 1 通りに決まる。よって，$n \geqq 2$ のもとで，求める確率は

n が 3 の倍数のとき 0，それ以外のとき $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下なので，(ⅰ)(ⅱ)の k は $k \leqq m-1$ をみたす。

総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する事象を D，A の最後の対戦相手が B である事象を E とおく。

求める条件付き確率は $P_D(E)=\dfrac{P(D\cap E)}{P(D)}$ である。

$P(D\cap E)$ は(ⅰ)の確率の合計であるから

$$m\geqq 2\text{のとき}\ \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}=\frac{1}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

これは $m=1$ でも成り立っている。

また，$P(D)$ は，$P(D\cap E)$ に(ⅱ)の確率の合計を加えたものであり，

$$\text{(ⅱ)の確率の合計は}\ \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}$$

よって

$$P(D)=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}+\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}$$

$$=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}$$