[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{1}$]

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

$x>0$ とする。

$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$， $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ とおく。

$f(x)<e<g(x)$ であることを示す。

$\log f(x)=x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ であるから，両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

ここで， $p(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$ とおくと

$p'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}<0$ であるから $p(x)$ は単調減少であり，

$\lim_{x\to\infty}p(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$ であることと合わせて $p(x)>0$

よって， $f'(x)=p(x)f(x)>0$ であるから $f(x)$ は単調増加である。

したがって， $\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ であることと合わせて $f(x)<e$ を得る。

次に， $\log g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ であるから，両辺を微分して

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}$$

ここで，$q(x)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}$ とおくと

$q'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot x(x+1)-(2x+1)\cdot(2x+1)}{\{x(x+1)\}^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0$ であるから

$q(x)$ は単調増加であり，$\lim_{x\to\infty}q(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x(x+1)}\right\}=0$

であることと合わせて $q(x)<0$

よって，$g'(x)=q(x)g(x)<0$ であるから $g(x)$ は単調減少である。

したがって，$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=e$ であることと合わせて $g(x)>e$ を得る。

以上から $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ が示された。