[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{1}$]

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{2}$]

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方法で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

（a）1 試合目で A と B が対戦する。

（b）2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

（c）k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{3}$]

a を $1 < a < 3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点を R_1, R_2, R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{4}$]

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

[東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{5}$]

k を正の整数とし、10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-\left[\sqrt{s}\right]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす

正の整数 s は存在しないことを示せ。

［ 東京大学 2016 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

　座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(ａ)，(ｂ)をみたしながら動く。

（ａ）点 A は平面 $z=0$ 上にある。

（ｂ）点 C(0, 0, 1) が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することが出来る範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。