[東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(-x,\ -y)$, $\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

3 点 P, Q, R が鋭角三角形をなすための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0$$

である。

$\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(-x,\ -y)$, $\mathrm{R}(1,\ 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-2x,\ -2y)\cdot(1-x,\ -y)=2(x^2-x+y^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(2x,\ 2y)\cdot(1+x,\ y)=2(x^2+x+y^2)$$

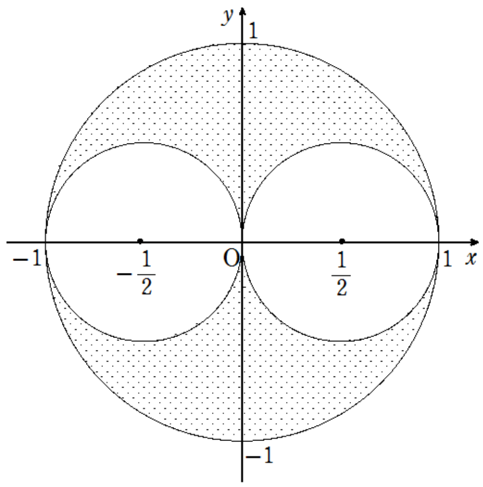
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(x-1,\ y)\cdot(-x-1,\ -y)=1-x^2-y^2$$

であるから，求める条件は

$$x^2-x+y^2>0 \text{ かつ } x^2+x+y^2>0 \text{ かつ } x^2+y^2<1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ かつ } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ かつ } x^2+y^2<1$$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示すると，下図の打点部分となる。ただし，境界は含まない。



[東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{2}$]

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方法で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

（a）1 試合目で A と B が対戦する。

（b）2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

（c）k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

---

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝するとき，次の条件がみたされなければならない。

4 試合目と 5 試合目で A が勝つ　…①

4 試合目までに 2 連勝したチームはない　…②

(ア) 1 試合目で A が勝つとき

勝者を矢印の上に書いて表すと

②より $\mathrm{AB} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{AC} \xrightarrow{\mathrm{C}} \mathrm{BC} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{AB} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{AC} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{A}$ 優勝

という 1 通りに決まる。

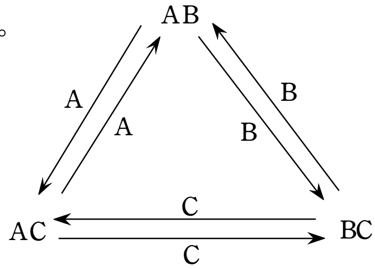
(イ) 1 試合目で B が勝つとき

②より $\mathrm{AB} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathrm{BC} \xrightarrow{\mathrm{C}} \mathrm{AC} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{AB} \xrightarrow{\mathrm{B}} \cdots$

となって，①がみたされない。

よって，求める確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

(2) 各試合の勝者と，どの 2 チームが対戦するかは，図のように推移する。



1 試合目で A が勝つと反時計回り，B が勝つと時計回りにこの図を回り始めるが，大会が終了するのは，あるチームが初めて 2 連勝した時点，すなわち図を逆向きに回った時点である。

A が優勝するのは次の場合である。

(ⅰ) $3k$ 回（k は正の整数）時計回りに回った後，A と B の試合で A が勝つ場合

(ⅱ) $3k+1$ 回（k は 0 以上の整数）反時計回りに回った後，A と C の試合で A が勝つ場合

(ⅰ)の総試合数は $3k+1$，(ⅱ)の総試合数は $3k+2$ であり，どちらの場合も各試合での勝敗は 1 通りに決まる。よって，$n \geqq 2$ のもとで，求める確率は

n が 3 の倍数のとき 0，それ以外のとき $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下なので，(ⅰ)(ⅱ)の k は $k \leqq m-1$ をみたす。

総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する事象を D とおく。

(ⅰ)の確率は

$$m \geqq 2 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}$$

これは $m=1$ でも成り立っている。

(ⅱ)の確率は

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}$$

よって，求める確率は

$$P(D) = \frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\} + \frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\} = \frac{5}{14} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}$$

[東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 2 つの放物線

$$A: y = x^2 \qquad B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域が囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

---

(1) A, B の方程式を連立させて得られる

$$x^2 = -x^2 + px + q \iff 2x^2 - px - q = 0$$

が $x = -1$ を重解にもつときである。

したがって，$2x^2 - px - q = 2(x+1)^2$ と因数分解できることから

係数を比較して $p = -4,\ q = -2$

(2) $B: y = -x^2 - 4x - 2$ を x 軸方向に $2t$，y 軸方向に t だけ平行移動した放物線 C の方程式は

$$y - t = -(x-2t)^2 - 4(x-2t) - 2 \iff y = -x^2 + 4(t-1)x - 4t^2 + 9t - 2$$

である。よって A, C の方程式を連立させて

$$x^2 = -x^2 + 4(t-1)x - 4t^2 + 9t - 2 \iff 2x^2 - 4(t-1)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0$$

解の公式により $x = \dfrac{2(t-1) \pm \sqrt{4(t-1)^2 - 2(4t^2 - 9t + 2)}}{2} = \dfrac{2(t-1) \pm \sqrt{-4t^2 + 10t}}{2}$

この実数解が A，C の共有点の x 座標である。

ここで，$-4t^2 + 10t > 0 \iff 0 < t < \dfrac{5}{2}$ である。

(i) $0 < t < \dfrac{5}{2}$ のとき

A と C は異なる 2 点で交わり，その x 座標を α, β（$\alpha < \beta$）とおくと，

$$S(t)=\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{-2(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\left(\beta-\alpha\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4t^2+10t}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(-4t^2+10t\right)^{\frac{3}{2}}$$

（ⅱ）$t\geqq\frac{5}{2}$ のとき

A と C は領域を囲まない。よって $S(t)=0$ $0<t<\frac{5}{2}$

(3) $0<t<\frac{5}{2}$ のもとで

$$-4t^2+10t=-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

であるから，$t=\frac{5}{4}$ のとき最大値 $\frac{25}{4}$ をとる。

したがって

$S(t)$ の最大値は $S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{125}{24}$

［ 東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{4}$ ］

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を10で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を4で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を10で割った余りを求めよ。

---

(1) $3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^3 = 27,\ 3^4 = 81$ より $a_1 = 3,\ a_2 = 9,\ a_3 = 7,\ a_4 = 1$ である。

また，$3^{n+4} = 81 \cdot 3^n \equiv 1 \cdot 3^n = 3^n \pmod{10}$ より，$a_{n+4} = a_n$ である。

したがって，k を正の整数として $a_{4k-3} = 3,\ a_{4k-2} = 9,\ a_{4k-1} = 7,\ a_{4k} = 1$

(2) $a_1 = 3,\ a_2 = 9$ より $b_1 = 3,\ b_2 = 1$ である。

また，$3^{n+2} = 9 \cdot 3^n \equiv 1 \cdot 3^n = 3^n \pmod 4$ より，$b_{n+2} = b_n$ である。

したがって，k を正の定数として $b_{2k-1} = 3,\ b_{2k} = 1$

(3) $x_{10} = 3^{x_9}$ を10で割った余りは，(1)より x_9 を4で割った余りからわかる。

また，$x_9 = 3^{x_8}$ を4で割った余りは，(2)より，x_8 を2で割った余りからわかる。

$x_8 = 3^{x_7}$（x_7 は正の整数）より x_8 は奇数であるから，x_8 を2で割った余りは1である。

よって，(2)より $x_9 \equiv 3 \pmod 4$ であり，(1)より $x_{10} = 7 \pmod{10}$

したがって，求める余りは7である。