[東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\ x_{n+1}=3^{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

(1) $3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81$ より $a_1=3,\ a_2=9,\ a_3=7,\ a_4=1$ である。

また，$3^{n+4}=81\cdot 3^n\equiv 1\cdot 3^n=3^n\ (\mathrm{mod}\,10)$ より，$a_{n+4}=a_n$ である。

したがって，k を正の整数として $a_{4k-3}=3,\ a_{4k-2}=9,\ a_{4k-1}=7,\ a_{4k}=1$

(2) $a_1=3,\ a_2=9$ より $b_1=3,\ b_2=1$ である。

また，$3^{n+2}=9\cdot 3^n\equiv 1\cdot 3^n=3^n\ (\mathrm{mod}\,4)$ より，$b_{n+2}=b_n$ である。

したがって，k を正の定数として $b_{2k-1}=3,\ b_{2k}=1$

(3) $x_{10}=3^{x_9}$ を 10 で割った余りは，(1)より x_9 を 4 で割った余りからわかる。

また，$x_9=3^{x_8}$ を 4 で割った余りは，(2)より，x_8 を 2 で割った余りからわかる。

$x_8=3^{x_7}$（x_7 は正の整数）より x_8 は奇数であるから，x_8 を 2 で割った余りは 1 である。

よって，(2)より $x_9\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)$ であり，(1)より $x_{10}=7\ (\mathrm{mod}\,10)$

したがって，求める余りは 7 である。