[東京大学 2016 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 2 つの放物線

$$A: y = x^2 \qquad B: y = -x^2 + px + q$$

が点 $(-1, 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域が囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

(1) A, B の方程式を連立させて得られる

$$x^2 = -x^2 + px + q \iff 2x^2 - px - q = 0$$

が $x = -1$ を重解にもつときである。

したがって，$2x^2 - px - q = 2(x+1)^2$ と因数分解できることから

係数を比較して $p = -4,\ q = -2$

(2) $B: y = -x^2 - 4x - 2$ を x 軸方向に $2t$，y 軸方向に t だけ平行移動した放物線 C の方程式は

$$y - t = -(x-2t)^2 - 4(x-2t) - 2 \iff y = -x^2 + 4(t-1)x - 4t^2 + 9t - 2$$

である。よって A, C の方程式を連立させて

$$x^2 = -x^2 + 4(t-1)x - 4t^2 + 9t - 2 \iff 2x^2 - 4(t-1)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0$$

解の公式により $x = \dfrac{2(t-1) \pm \sqrt{4(t-1)^2 - 2(4t^2 - 9t + 2)}}{2} = \dfrac{2(t-1) \pm \sqrt{-4t^2 + 10t}}{2}$

この実数解が A，C の共有点の x 座標である。

ここで，$-4t^2 + 10t > 0 \iff 0 < t < \dfrac{5}{2}$ である。

(i) $0 < t < \dfrac{5}{2}$ のとき

A と C は異なる 2 点で交わり，その x 座標を α, β（$\alpha < \beta$）とおくと，

$$S(t)=\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2+4(t-1)x-4t^2+9t-2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{-2(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{-4t^2+10t}\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(-4t^2+10t\right)^{\frac{3}{2}}$$

（ⅱ）$t \geqq \frac{5}{2}$ のとき

A と C は領域を囲まない。よって $S(t)=0$ $0<t<\frac{5}{2}$

(3) $0<t<\frac{5}{2}$ のもとで

$$-4t^2+10t=-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

であるから，$t=\frac{5}{4}$ のとき最大値 $\frac{25}{4}$ をとる。

したがって

$S(t)$ の最大値は $S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{125}{24}$