

[ 東京大学 2016 年前期 文科 2 ]



A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方法で試合を行い、2 連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

- (a) 1 試合目で A と B が対戦する。
- (b) 2 試合目で、1 試合目の勝者と、1 試合目で待機していた C が対戦する。
- (c)  $k$  試合目で優勝チームが決まらない場合は、 $k$  試合目の勝者と、 $k$  試合目で待機していたチームが  $k+1$  試合目で対戦する。ここで  $k$  は 2 以上の整数とする。

なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は  $\frac{1}{2}$  で、引き分けはないものとする。

- (1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (2)  $n$  を 2 以上の整数とする。ちょうど  $n$  試合目で A が優勝する確率を求めよ。
- (3)  $m$  を正の整数とする。総試合数が  $3m$  回以下で A が優勝する確率を求めよ。



(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝するとき、次の条件がみたされなければならない。

4 試合目と 5 試合目で A が勝つ …①

4 試合目までに 2 連勝したチームはない …②

(ア) 1 試合目で A が勝つとき

勝者を矢印の上に入れて表すと

②より  $AB \xrightarrow{A} AC \xrightarrow{C} BC \xrightarrow{B} AB \xrightarrow{A} AC \xrightarrow{A} A$  優勝

という 1 通りに決まる。

(イ) 1 試合目で B が勝つとき

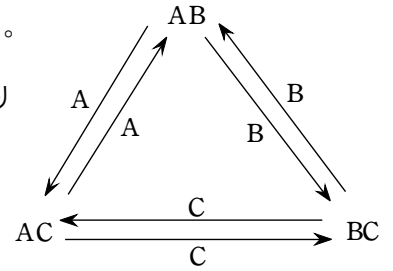
②より  $AB \xrightarrow{B} BC \xrightarrow{C} AC \xrightarrow{A} AB \xrightarrow{B} \dots$

となって、①がみたされない。

よって、求める確率は  $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

(2) 各試合の勝者と、どの2チームが対戦するかは、図のように推移する。

1試合目でAが勝つと反時計回り、Bが勝つと時計回りにこの図を回り始めるが、大会が終了するのは、あるチームが初めて2連勝した時点、すなわち図を逆向きに回った時点である。



Aが優勝するのは次の場合である。

(i)  $3k$ 回 ( $k$ は正の整数) 時計回りに回った後、AとBの試合でAが勝つ場合

(ii)  $3k+1$ 回 ( $k$ は0以上の整数) 反時計回りに回った後、AとCの試合でAが勝つ場合

(i)の総試合数は $3k+1$ 、(ii)の総試合数は $3k+2$ であり、どちらの場合も各試合での勝敗は1通りに決まる。よって、 $n \geq 2$ のもとで、求める確率は

$$n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき } 0, \text{ それ以外のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) 総試合数が $3m$ 回以下なので、(i)(ii)の $k$ は $k \leq m-1$ をみます。

総試合数が $3m$ 回以下でAが優勝する事象を $D$ とおく。

(i)の確率は

$$m \geq 2 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right\}$$

これは $m=1$ でも成り立っている。

(ii)の確率は

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m \right\}$$

よって、求める確率は

$$P(D) = \frac{1}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{m-1} \right\} + \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^m \right\} = \frac{5}{14} - \frac{6}{7} \left(\frac{1}{8}\right)^m$$