

[ 東京大学 2016 年前期 文科 1 ]



座標平面上の 3 点  $P(x, y)$ ,  $Q(-x, -y)$ ,  $R(1, 0)$  が鋭角三角形をなすための  $(x, y)$  についての条件を求めよ。また、その条件をみたす点  $P(x, y)$  の範囲を図示せよ。



3 点  $P, Q, R$  が鋭角三角形をなすための条件は

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} > 0 \quad \text{かつ} \quad \overline{QP} \cdot \overline{QR} > 0 \quad \text{かつ} \quad \overline{RP} \cdot \overline{RQ} > 0$$

である。

$P(x, y)$ ,  $Q(-x, -y)$ ,  $R(1, 0)$  より

$$\overline{PQ} \cdot \overline{PR} = (-2x, -2y) \cdot (1-x, -y) = 2(x^2 - x + y^2)$$

$$\overline{QP} \cdot \overline{QR} = (2x, 2y) \cdot (1+x, y) = 2(x^2 + x + y^2)$$

$$\overline{RP} \cdot \overline{RQ} = (x-1, y) \cdot (-x-1, -y) = 1 - x^2 - y^2$$

であるから、求める条件は

$$x^2 - x + y^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad x^2 + x + y^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{かつ} \quad x^2 + y^2 < 1$$

よって、点  $P(x, y)$  の範囲を図示すると、下図の打点部分となる。ただし、境界は含まない。

