［ 東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{1}$ ］

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

点 $(x,\ y)$ が C の通過する領域に含まれるための条件は

$y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ …① を満たす正の実数 a が存在すること

である。

①を変形すると $4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2 \iff 4(1-x^2)a^2 + 4ya - 1 = 0$ …②

（ｉ）$1-x^2=0$ すなわち $x=\pm1$ のとき

② $\iff$ $4ya=1$ となり正の解 a をもつための y の条件は $y>0$

（ii）$1-x^2 \neq 0$ すなわち $x \neq \pm 1$ のとき

a の２次方程式②が実数解をもつことから，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4} = (2y)^2 - 4(1-x^2)(-1) = 4(-x^2+y^2+1) \geqq 0$ である。

よって $x^2 - y^2 \leqq 1$ である。このもとで以下考える。

（A）$1-x^2>0$ すなわち $-1<x<1$ のとき

②の２解の積は $\dfrac{-1}{4(1-x^2)} < 0$ であるから，２解の符号は異なるので適する。

（B）$1-x^2<0$ すなわち $x<-1,\ 1<x$ のとき

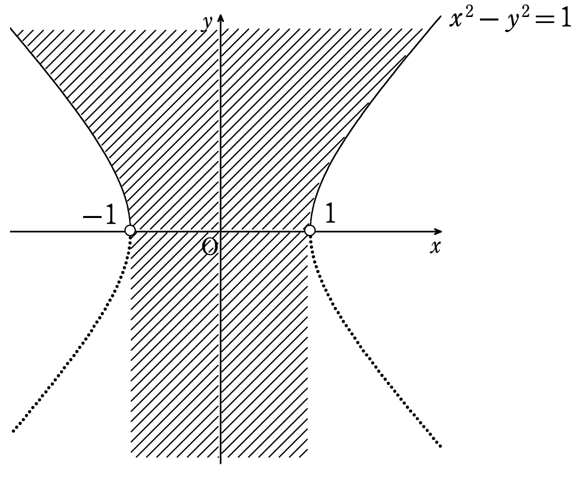
②の２解の積は $\dfrac{-1}{4(1-x^2)} > 0$ であるから，

条件は②の２解の和について $-\dfrac{4y}{4(1-x^2)} > 0$ となることである。

よって $y>0$ となればよい。

以上より，C の通過する領域は図の斜線部である。

ただし，境界線は $x^2-y^2=1,\ y>0$ の部分のみ含む。



[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{2}$]

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が1, 2, 3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2, 5, 6, 3, 4であったとすると，得られる文字列はAACDAABとなる。このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) n を2以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ。

---

(1) 1, 2, 3が出たときに書くAAを A_1A_2 とし，2つのAを区別して考える。

n 文字目が A_1 である確率を p_n，A_2 である確率を q_n とおく。

このとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ である。

ここで，$n+1$ 文字目が A_1 となるのは，

n 文字目が A_1 以外の文字で，次にさいころの目1, 2, 3が出るときであるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{2} \iff p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2} \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

したがって $p_n=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ …① となる。

また，$n\geqq 2$ のとき，n 文字目が A_2 となるのは，$n-1$ 文字目が A_1 であるときなので

$q_n=p_{n-1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ …② となる。

$q_1=0$ より，②は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，求める確率は①，②より

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) $n-1$ 文字目が A_2 であり，次にさいころを投げて4が出るときであるから

求める確率は $q_{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{3}$]

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$（$x>0$），$y=\log x$（$x>0$）を考える。この 2 つの曲線の共有点が1点のみであるとし，その共有点をQとする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点Qの x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

(1) $f(x)=ax^p-\log x$（$x>0$）とおく。

$f(x)=0$ となる x が 1 つであるための条件を求める。

$f'(x)=apx^{p-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{apx^p-1}{x}$ より $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	(0)	$\cdots$	$(ap)^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	＋
$f(x)$		↘		↗

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(\log x)\left(a\cdot\frac{x^p}{\log x}-1\right)=\infty$ であることに注意すると，

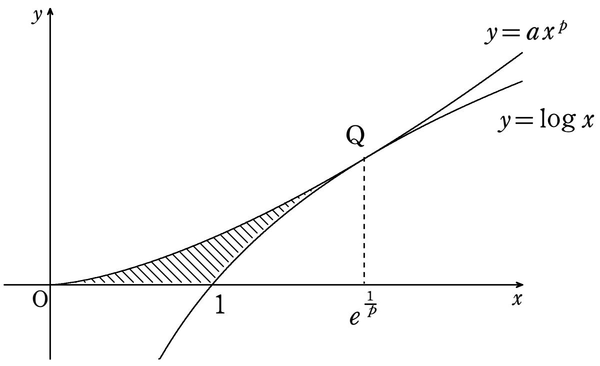
条件を満たすのは $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right)=0$ のときである。

したがって $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right)=a\cdot\dfrac{1}{ap}+\dfrac{1}{p}\log ap=\dfrac{1+\log ap}{p}=0$ より

$ap=\dfrac{1}{e}$ ⇔ $a=\dfrac{1}{ep}$ となる。

また，Qの x 座標は $(ap)^{-\frac{1}{p}}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$ である。

(2) (1)より $y=ax^p$ の方が上にある。



求める体積を V とすると

$$V=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi\left(ax^p\right)^2dx-\int_1^e\pi(\log x)^2dx$$

ここで，$V_1=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi\left(ax^p\right)^2dx$，$V_2=\int_1^e\pi(\log x)^2dx$ とおくと

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}a^2x^{2p}dx=\left[\frac{a^2}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^{\frac{1}{p}}=\frac{a^2}{2p+1}e^{\frac{2p+1}{p}}=\frac{1}{(ep)^2(2p+1)}e^{2+\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}$$

であり，さらに

$$\int_1^e(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\cdot2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C$ （C は積分定数）となるので

$$\frac{V_2}{\pi}=\left[x\left\{(\log x)^2-2\log x+2\right\}\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}=e^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)-2=\frac{2p^2-2p+1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2$$

である。

したがって

$$V=V_1-V_2$$

$$=\pi\left[\left\{\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}\right\}-\left\{\frac{2p^2-2p+1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2\right\}\right]$$

$$=\pi\left\{\frac{1-(2p^2-2p+1)(2p+1)}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}$$

$$=2\pi\left(\frac{-2p+1}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+1\right)$$

(3) $V=2\pi$ であるから $-2p+1=0$ より $p=\dfrac{1}{2}$

[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{4}$]

数列$\{p_n\}$を次のように定める。$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

（1）$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

（2）すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

（3）数列$\{q_n\}$を次のように定める。$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。

$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ …① とする。

（1）$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおく。

このとき，

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}=\frac{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{{p_n}^2}+1}{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_np_{n+1}}=a_n$$

となるので，$\{a_n\}$は定数数列であるからnによらない。

（証明終）

（2）$a_1=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot1}=3$ であるから $a_n=3$ …②となる。

また，①より ${p_{n+1}}^2+1=p_np_{n+2}$ であるから

$a_n=\dfrac{{p_n}^2+p_np_{n+2}}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{p_n+p_{n+2}}{p_{n+1}}$ …③ であり，

②③より $\dfrac{p_n+p_{n+2}}{p_{n+1}}=3$ なので $p_n+p_{n+2}=3p_{n+1}$

したがって $p_{n-1}+p_{n+1}=3p_n$（$n\geqq2$）

(3) 数学的帰納法により $p_n = q_{2n-1}$ であることを示す。

（ｉ）$n=1$ のとき $p_1=1,\ q_1=1$ であるから成り立つ。

$n=2$ のときも $p_2=2,\ q_3=1+1=2$ より成り立つ。

（ⅱ）$n=k,\ k+1$ のとき成り立つと仮定すると $p_k = q_{2k-1}$，$p_{k+1} = q_{2k+1}$ …④

このとき，(2)より $p_{k+2} = 3p_{k+1} - p_k$ …⑤であり，

$$q_{2k+3} = q_{2k+2} + q_{2k+1} = (q_{2k+1} + q_{2k}) + q_{2k+1} = 2q_{2k+1} + q_{2k} = 2q_{2k+1} + (q_{2k+1} - q_{2k-1})$$

$$= 3q_{2k+1} - q_{2k-1}$$

④より $= 3p_{k+1} - p_k$ …⑥

⑤，⑥より $p_{k+2} = q_{2k+3}$ であるから $n=k+2$ のときも成り立つ。

（ｉ)(ⅱ)より すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ が成り立つ。

（証明終）

[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{5}$]

m を2015以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015\cdot 2014\cdot\cdots\cdot(2016-m)}{m\cdot(m-1)\cdot\cdots\cdot 1}=\frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\quad\cdots①$$

右辺にかけられている k（$1\leqq k\leqq m$）番目の分数は $\dfrac{2016-k}{k}$ …② である。

$2016=2^5\cdot 63$ に注意して，k と $2016-k$ について2で割り切れる回数の大小を考える。

k が2で r 回（$0\leqq r\leqq 4$…③）まで割り切れる，すなわち奇数 ℓ を用いて

$k=2^r\cdot\ell$（$0\leqq r\leqq 4$）と表されるとする

このとき，$2016-k=2^5\cdot 63-2^r\cdot\ell=2^r(2^{5-r}\cdot 63-\ell)$ となるが，

③より $5-r\geqq 1$ であり，ℓ が奇数であることから，$2^{5-r}\cdot 63-\ell$ は奇数となる。

よって，$2016-k$ は2で r 回まで割り切れ，②の分母と分子は2で割り切れる回数が等しい。…④

$m<2^5$ のときは，$1\leqq k\leqq m$ において k は2で4回以下しか割り切れないので，

④より，①の分母と分子は2で割り切れる回数が等しく，①は奇数となる。

$m=2^5=32$ とすると，$m=31$ のときの①が $\dfrac{2016-2^5}{2^5}=\dfrac{2^5\cdot 63-2^5}{2^5}=\dfrac{2^5\cdot 62}{2^5}=62$ 倍され，

①は初めて偶数となる。

したがって，求める m の最小値は32である。

[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{6}$]

★━━━★

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$

$f(x)$ を連続な関数とし， $p,\ q$ を実数とする。

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。 $h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$

このとき，次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

★━━━★

(1) $|nx|>1$ すなわち $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき $g(nx)=0$ …① であるから

$$n\int_{-1}^{1} g(nx)\,f(x)\,dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,f(x)\,dx \quad \cdots②$$ となる。

ここで，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において $g(nx)=\dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2}\geqq 0,\ p\leqq f(x)\leqq q$ であるから

②は $\displaystyle n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot p\,dx\leqq ② \leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot q\,dx$ …③ と評価できる。

さらに，$\displaystyle n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx=n\left[\frac{\sin(\pi nx)}{2\pi n}+\frac{x}{2}\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}=1$ であるから

②，③より $p\leqq ② \leqq q$ が成り立つ。

（証明終）

（2）$F(x)=\log(1+e^{x+1})$ とおく。

$|nx|>1$ すなわち $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき $h(nx)=0$ であるから

$n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)F(x)\,dx=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)F(x)\,dx$ …④ となる。

$|x|<1$ において $g'(x)=h(x)$ すなわち $|x|<\dfrac{1}{n}$ において $\{g(nx)\}'=n\cdot h(nx)$ であるから

部分積分によって

$$④=n^2\left\{\left[\frac{g(nx)}{n}\cdot F(x)\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\frac{g(nx)}{n}\cdot F'(x)\,dx\right\}$$

$=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)F'(x)\,dx$ （$\because$ $g(\pm1)=0$）

$=-n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx$ （$\because$ ①）を得る。

$F'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ は単調増加であるから

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において $F'\left(-\dfrac{1}{n}\right)\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx\leqq F'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立ち

$F'\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e}{1+e}$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx=\frac{e}{1+e}$ となる。

したがって，求める極限は $-\dfrac{e}{1+e}$