

[ 東京大学 2015 年前期 理科 1 ]



正の実数  $a$  に対して、座標平面上で次の放物線を考える。  $C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$

$a$  が正の実数全体を動くとき、 $C$  の通過する領域を図示せよ。



点  $(x, y)$  が  $C$  の通過する領域に含まれるための条件は

$$y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a} \quad \dots \textcircled{1} \text{ を満たす正の実数 } a \text{ が存在すること}$$

である。

$$\textcircled{1} \text{ を変形すると } 4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2 \Leftrightarrow 4(1-x^2)a^2 + 4ya - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

(i)  $1-x^2=0$  すなわち  $x=\pm 1$  のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 4ya=1 \text{ となり正の解 } a \text{ をもつための } y \text{ の条件は } y > 0$$

(ii)  $1-x^2 \neq 0$  すなわち  $x \neq \pm 1$  のとき

$a$  の 2 次方程式  $\textcircled{2}$  が実数解をもつことから、判別式を  $D$  とすると

$$\frac{D}{4} = (2y)^2 - 4(1-x^2)(-1) = 4(-x^2 + y^2 + 1) \geq 0 \text{ である。}$$

よって  $x^2 - y^2 \leq 1$  である。このもとで以下考える。

(A)  $1-x^2 > 0$  すなわち  $-1 < x < 1$  のとき

$$\textcircled{2} \text{ の 2 解の積は } \frac{-1}{4(1-x^2)} < 0 \text{ であるから、2 解の符号は異なるので適する。}$$

(B)  $1-x^2 < 0$  すなわち  $x < -1, 1 < x$  のとき

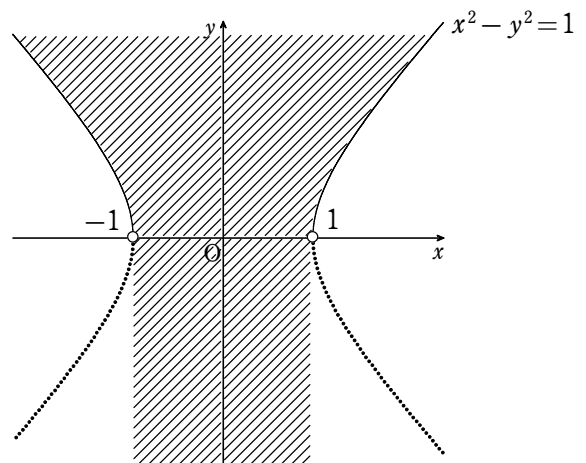
$$\textcircled{2} \text{ の 2 解の積は } \frac{-1}{4(1-x^2)} > 0 \text{ であるから、}$$

$$\text{条件は } \textcircled{2} \text{ の 2 解の和について } -\frac{4y}{4(1-x^2)} > 0 \text{ となることである。}$$

よって  $y > 0$  となればよい。

以上より、 $C$  の通過する領域は図の斜線部である。

ただし、境界線は  $x^2 - y^2 = 1, y > 0$  の部分のみ含む。





どの目も出る確率が  $\frac{1}{6}$  のさいころを1つ用意し、次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ、出た目が1, 2, 3のときは文字列 AA を書き、4のときは文字 B を、5のときは文字 C を、6のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って、AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、さいころを5回投げ、その出た目が順に2, 5, 6, 3, 4であったとすると、得られる文字列は AACDAAB となる。このとき、左から4番目の文字は D、5番目の文字は A である。

- (1)  $n$  を正の整数とする。 $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n$  番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2)  $n$  を2以上の整数とする。 $n$  回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から  $n-1$  番目の文字が A で、かつ  $n$  番目の文字が B となる確率を求めよ。



- (1) 1, 2, 3 が出たときに書く AA を  $A_1A_2$  とし、2つの A を区別して考える。

$n$  文字目が  $A_1$  である確率を  $p_n$ 、 $A_2$  である確率を  $q_n$  とおく。

このとき、 $p_1 = \frac{1}{2}$ 、 $q_1 = 0$  である。

ここで、 $n+1$ 文字目が  $A_1$  となるのは、

$n$  文字目が  $A_1$  以外の文字で、次にさいころの目1, 2, 3が出るときであるから

$$p_{n+1} = (1-p_n) \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

したがって  $p_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$  …① となる。

また、 $n \geq 2$  のとき、 $n$  文字目が  $A_2$  となるのは、 $n-1$ 文字目が  $A_1$  であるときなので

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} \left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
 …② となる。

$q_1 = 0$  より、②は  $n=1$  でも成り立つ。

したがって、求める確率は①, ②より

$$p_n + q_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right\} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} \right)^n$$

(2)  $n-1$ 文字目が  $A_2$  であり、次にさいころを投げて4が出るときであるから

$$\text{求める確率は } q_{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-2} \right\}$$

[ 東京大学 2015 年前期 理科 3 ]



$a$  を正の実数とし、 $p$  を正の有理数とする。座標平面上の2つの曲線  $y = ax^p$  ( $x > 0$ )、 $y = \log x$  ( $x > 0$ ) を考える。この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし、その共有点を  $Q$  とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$  を証明なしに用いてよい。

- (1)  $a$  および点  $Q$  の  $x$  座標を  $p$  を用いて表せ。
- (2) この2つの曲線と  $x$  軸で囲まれる図形を、 $x$  軸のまわりに1回転してできる立体の体積を  $p$  を用いて表せ。
- (3) (2)で得られる立体の体積が  $2\pi$  になるときの  $p$  の値を求めよ。



(1)  $f(x) = ax^p - \log x$  ( $x > 0$ ) とおく。

$f(x) = 0$  となる  $x$  が1つであるための条件を求める。

$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{apx^p - 1}{x}$  より  $f(x)$  の増減は下表に従う。

$x$	(0)	...	$(ap)^{-\frac{1}{p}}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘		↗

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x) \left( a \cdot \frac{x^p}{\log x} - 1 \right) = \infty$  であることに注意すると、

条件を満たすのは  $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right) = 0$  のときである。

したがって  $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right) = a \cdot \frac{1}{ap} + \frac{1}{p} \log ap = \frac{1 + \log ap}{p} = 0$  より

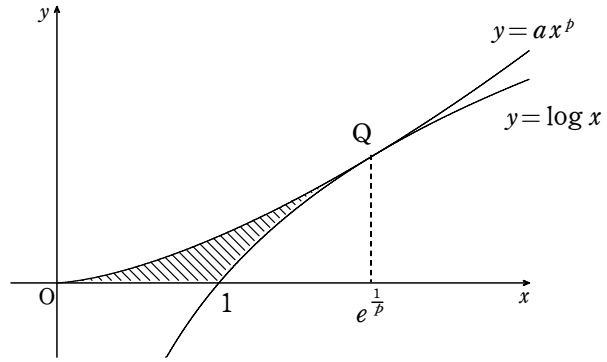
$ap = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = \frac{1}{ep}$  となる。

また、 $Q$  の  $x$  座標は  $(ap)^{-\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{-\frac{1}{p}}$  である。

(2) (1)より  $y = ax^p$  の方が上にある。

求める体積を  $V$  とすると

$$V = \int_0^{e^{\frac{1}{p}}} \pi(ax^p)^2 dx - \int_1^e \pi(\log x)^2 dx$$



ここで、 $V_1 = \int_0^{e^{\frac{1}{p}}} \pi(ax^p)^2 dx$ ,  $V_2 = \int_1^e \pi(\log x)^2 dx$  とおくと

$$\frac{V_1}{\pi} = \int_0^{e^{\frac{1}{p}}} a^2 x^{2p} dx = \left[ \frac{a^2}{2p+1} x^{2p+1} \right]_0^{e^{\frac{1}{p}}} = \frac{a^2}{2p+1} e^{\frac{2p+1}{p}} = \frac{1}{(ep)^2(2p+1)} e^{2+\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^2(2p+1)} e^{\frac{1}{p}}$$

であり、さらに

$$\int_1^e (\log x)^2 dx = x(\log x)^2 - \int x \cdot 2(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx$$

$$= x(\log x)^2 - 2(x \log x - x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) \text{ となるので}$$

$$\frac{V_2}{\pi} = \left[ x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \} \right]_1^{e^{\frac{1}{p}}} = e^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2 \right) - 2 = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p^2} e^{\frac{1}{p}} - 2$$

である。

したがって

$$V = V_1 - V_2$$

$$= \pi \left[ \left\{ \frac{1}{p^2(2p+1)} e^{\frac{1}{p}} \right\} - \left\{ \frac{2p^2 - 2p + 1}{p^2} e^{\frac{1}{p}} - 2 \right\} \right]$$

$$= \pi \left\{ \frac{1 - (2p^2 - 2p + 1)(2p + 1)}{p^2(2p + 1)} e^{\frac{1}{p}} + 2 \right\}$$

$$= 2\pi \left( \frac{-2p + 1}{2p + 1} e^{\frac{1}{p}} + 1 \right)$$

(3)  $V = 2\pi$  であるから  $-2p + 1 = 0$  より  $p = \frac{1}{2}$



数列  $\{p_n\}$  を次のように定める。  $p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(1)  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  が  $n$  によらないことを示せ。

(2) すべての  $n = 2, 3, 4, \dots$  に対し,  $p_{n+1} + p_{n-1}$  を  $p_n$  のみを使って表せ。

(3) 数列  $\{q_n\}$  を次のように定める。  $q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

すべての  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  を示せ。



$p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \dots \textcircled{1}$  とする。

(1)  $a_n = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$  とおく。

このとき,  $p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}$  より  $p_{n+1}^2 + 1 = p_{n+2}p_n$  であるから

$$a_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+2}p_n}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}} = \frac{p_{n+2}p_n + p_n^2}{p_{n+1}p_n} = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n} = a_n$$

となるので,  $\{a_n\}$  は定数数列であるから  $n$  によらない。

(証明終)

[別解]  $a_{n+1} = a_n$  は, 以下のように示すこともできる。

$$a_{n+1} = \frac{p_{n+2}^2 + p_{n+1}^2 + 1}{p_{n+2}p_{n+1}} = \frac{\left(\frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n}\right)^2 + p_{n+1}^2 + 1}{\frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \cdot p_{n+1}} = \frac{\frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n^2} + 1}{\frac{p_{n+1}}{p_n}} = \frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_n p_{n+1}} = a_n$$

(2) (1)より  $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_n p_{n+1}}$  は定数であるから,

この式の変形の途中で現れた  $\frac{p_{n+2} + p_n}{p_{n+1}}$  も定数である。

よって,  $n \geq 2$  のとき  $\frac{p_{n+1} + p_{n-1}}{p_n} = \frac{p_3 + p_1}{p_2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$

したがって  $p_{n-1} + p_{n+1} = 3p_n$

(3) 数学的帰納法により  $p_n = q_{2n-1}$  であることを示す。

(i)  $n=1$  のとき  $p_1=1, q_1=1$  であるから成り立つ。

$n=2$  のときも  $p_2=2, q_3=1+1=2$  より成り立つ。

(ii)  $n=k, k+1$  のとき成り立つと仮定すると  $p_k = q_{2k-1}, p_{k+1} = q_{2k+1} \cdots$ ④

このとき、(2)より  $p_{k+2} = 3p_{k+1} - p_k \cdots$ ⑤であり、

$$\begin{aligned} q_{2k+3} &= q_{2k+2} + q_{2k+1} = (q_{2k+1} + q_{2k}) + q_{2k+1} = 2q_{2k+1} + q_{2k} = 2q_{2k+1} + (q_{2k+1} - q_{2k-1}) \\ &= 3q_{2k+1} - q_{2k-1} \end{aligned}$$

$$\text{④より } = 3p_{k+1} - p_k \cdots \text{⑥}$$

⑤, ⑥より  $p_{k+2} = q_{2k+3}$  であるから  $n=k+2$  のときも成り立つ。

(i)(ii)より すべての  $n=1, 2, 3, \dots$  に対し,  $p_n = q_{2n-1}$  が成り立つ。

(証明終)

[別解]

$r_n = q_{2n-1}$  とおく。

このとき,  $r_1 = q_1 = 1, r_2 = q_3 = q_2 + q_1 = 2$

次に,  $n \geq 2$  のとき,  $q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$  を繰り返し用いると

$$\begin{aligned} r_{n+1} + r_{n-1} &= q_{2n+1} + q_{2n-3} \\ &= (q_{2n} + q_{2n-1}) + q_{2n-3} \\ &= (q_{2n-1} + q_{2n-2}) + q_{2n-1} + (q_{2n-1} - q_{2n-2}) \\ &= 3q_{2n-1} \\ &= 3r_n \end{aligned}$$

したがって, 数列  $\{r_n\}$  と数列  $\{p_n\}$  は一致する。

よって  $p_n = q_{2n-1}$  である。

(証明終)

[ 東京大学 2015 年前期 理科 5 ]



$m$  を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$  が偶数となる最小の  $m$  を求めよ。



$${}_{2015}C_m = \frac{2015 \cdot 2014 \cdots (2016-m)}{m \cdot (m-1) \cdots 1} = \frac{2015}{1} \cdot \frac{2014}{2} \cdots \frac{2016-m}{m} \cdots \textcircled{1}$$

右辺にかけられている  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) 番目の分数は  $\frac{2016-k}{k} \cdots \textcircled{2}$  である。

$2016 = 2^5 \cdot 63$  に注意して、 $k$  と  $2016-k$  について 2 で割り切れる回数の大小を考える。

$k$  が 2 で  $r$  回 ( $0 \leq r \leq 4 \cdots \textcircled{3}$ ) まで割り切れる、すなわち奇数  $\ell$  を用いて

$$k = 2^r \cdot \ell \quad (0 \leq r \leq 4)$$
 と表されるとする

このとき、 $2016-k = 2^5 \cdot 63 - 2^r \cdot \ell = 2^r (2^{5-r} \cdot 63 - \ell)$  となるが、

$\textcircled{3}$  より  $5-r \geq 1$  であり、 $\ell$  が奇数であることから、 $2^{5-r} \cdot 63 - \ell$  は奇数となる。

よって、 $2016-k$  は 2 で  $r$  回まで割り切れ、 $\textcircled{2}$  の分母と分子は 2 で割り切れる回数が等しい。… $\textcircled{4}$

$m < 2^5$  のときは、 $1 \leq k \leq m$  において  $k$  は 2 で 4 回以下しか割り切れないので、

$\textcircled{4}$  より、 $\textcircled{1}$  の分母と分子は 2 で割り切れる回数が等しく、 $\textcircled{1}$  は奇数となる。

$m = 2^5 = 32$  とすると、 $m = 31$  のときの  $\textcircled{1}$  が  $\frac{2016-2^5}{2^5} = \frac{2^5 \cdot 63 - 2^5}{2^5} = \frac{2^5 \cdot 62}{2^5} = 62$  倍され、

$\textcircled{1}$  は初めて偶数となる。

したがって、求める  $m$  の最小値は 32 である。





$n$  を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $g(x)$  を次のように定める。  $g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$f(x)$  を連続な関数とし、 $p, q$  を実数とする。

$|x| \leq \frac{1}{n}$  をみたす  $x$  に対して  $p \leq f(x) \leq q$  が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数  $h(x)$  を次のように定める。  $h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

このとき、次の極限を求めよ。  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1+e^{x+1}) dx$



(1)  $|nx| > 1$  すなわち  $|x| > \frac{1}{n}$  のとき  $g(nx) = 0 \cdots \textcircled{1}$  であるから

$$n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx = n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) f(x) dx \cdots \textcircled{2} \text{ となる。}$$

ここで、 $|x| \leq \frac{1}{n}$  において  $g(nx) = \frac{\cos(\pi nx)+1}{2} \geq 0$ ,  $p \leq f(x) \leq q$  であるから

$$\textcircled{2} \text{ は } n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot p dx \leq \textcircled{2} \leq n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) \cdot q dx \cdots \textcircled{3} \text{ と評価できる。}$$

$$\text{さらに、} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) dx = n \left[ \frac{\sin(\pi nx)}{2\pi n} + \frac{x}{2} \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ であるから}$$

$\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$  より  $p \leq \textcircled{2} \leq q$  が成り立つ。

(証明終)

(2)  $F(x) = \log(1+e^{x+1})$  とおく。

$|nx| > 1$  すなわち  $|x| > \frac{1}{n}$  のとき  $h(nx) = 0$  であるから

$$n^2 \int_{-1}^1 h(nx)F(x) dx = n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)F(x) dx \cdots \textcircled{4} \text{ となる。}$$

$|x| < 1$  において  $g'(x) = h(x)$  すなわち  $|x| < \frac{1}{n}$  において  $\{g(nx)\}' = n \cdot h(nx)$  であるから

部分積分によって

$$\textcircled{4} = n^2 \left\{ \left[ \frac{g(nx)}{n} \cdot F(x) \right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{g(nx)}{n} \cdot F'(x) dx \right\}$$

$$= -n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx) F'(x) dx \quad (\because g(\pm 1) = 0)$$

$$= -n \int_{-1}^1 g(nx) F'(x) dx \quad (\because \textcircled{1}) \text{ を得る。}$$

$F'(x) = \frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = 1 - \frac{1}{1+e^{x+1}}$  は単調増加であるから

$|x| \leq \frac{1}{n}$  において  $F'\left(-\frac{1}{n}\right) \leq n \int_{-1}^1 g(nx) F'(x) dx \leq F'\left(\frac{1}{n}\right)$  が成り立ち

$F'\left(\pm \frac{1}{n}\right) = \frac{e}{1+e}$  よりはさみうちの原理から  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_{-1}^1 g(nx) F'(x) dx = \frac{e}{1+e}$  となる。

したがって、求める極限は  $-\frac{e}{1+e}$