[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{6}$]

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――――★

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$f(x)$ を連続な関数とし， $p,\ q$ を実数とする。

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$p\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)\,f(x)\,dx\leqq q$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。 $h(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき}) \end{cases}$

このとき，次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――――★

(1) $|nx|>1$ すなわち $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき $g(nx)=0$ …① であるから

$n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)\,f(x)\,dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\,f(x)\,dx$ …② となる。

ここで，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において $g(nx)=\dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2}\geqq 0,\ p\leqq f(x)\leqq q$ であるから

②は $n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot p\,dx\leqq$ ② $\leqq n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot q\,dx$ …③ と評価できる。

さらに，$n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\,dx=n\left[\frac{\sin(\pi nx)}{2\pi n}+\frac{x}{2}\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}=1$ であるから

②，③より $p\leqq$ ② $\leqq q$ が成り立つ。

（証明終）

（2）$F(x)=\log(1+e^{x+1})$ とおく。

$|nx|>1$ すなわち $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき $h(nx)=0$ であるから

$$n^2\int_{-1}^{1}h(nx)F(x)\,dx=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)F(x)\,dx \quad \cdots④$$ となる。

$|x|<1$ において $g'(x)=h(x)$ すなわち $|x|<\dfrac{1}{n}$ において $\{g(nx)\}'=n\cdot h(nx)$ であるから

部分積分によって

$$④=n^2\left\{\left[\frac{g(nx)}{n}\cdot F(x)\right]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\frac{g(nx)}{n}\cdot F'(x)\,dx\right\}$$

$$=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)F'(x)\,dx \quad （\because\ \ g(\pm 1)=0）$$

$$=-n\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx$$ （∵ ①）を得る。

$F'(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ は単調増加であるから

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において $F'\left(-\dfrac{1}{n}\right)\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx\leqq F'\left(\dfrac{1}{n}\right)$ が成り立ち

$F'\left(\pm\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{e}{1+e}$ よりはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\int_{-1}^{1}g(nx)F'(x)\,dx=\dfrac{e}{1+e}$ となる。

したがって，求める極限は $-\dfrac{e}{1+e}$