［ 東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015\cdot 2014\cdot\cdots\cdot(2016-m)}{m\cdot(m-1)\cdot\cdots\cdot 1}=\frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\quad\cdots①$$

右辺にかけられている k（$1\leqq k\leqq m$）番目の分数は $\dfrac{2016-k}{k}$ …② である。

$2016=2^5\cdot 63$ に注意して，k と $2016-k$ について 2 で割り切れる回数の大小を考える。

k が 2 で r 回（$0\leqq r\leqq 4$…③）まで割り切れる，すなわち奇数 ℓ を用いて

$k=2^r\cdot\ell$（$0\leqq r\leqq 4$）と表されるとする

このとき，$2016-k=2^5\cdot 63-2^r\cdot\ell=2^r(2^{5-r}\cdot 63-\ell)$ となるが，

③より $5-r\geqq 1$ であり，ℓ が奇数であることから，$2^{5-r}\cdot 63-\ell$ は奇数となる。

よって，$2016-k$ は 2 で r 回まで割り切れ，②の分母と分子は 2 で割り切れる回数が等しい。…④

$m<2^5$ のときは，$1\leqq k\leqq m$ において k は 2 で 4 回以下しか割り切れないので，

④より，①の分母と分子は 2 で割り切れる回数が等しく，①は奇数となる。

$m=2^5=32$ とすると，$m=31$ のときの①が $\dfrac{2016-2^5}{2^5}=\dfrac{2^5\cdot 63-2^5}{2^5}=\dfrac{2^5\cdot 62}{2^5}=62$ 倍され，

①は初めて偶数となる。

したがって，求める m の最小値は 32 である。