[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{4}$]

数列$\{p_n\}$を次のように定める。$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）

すべての $n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ …① とする。

(1) $a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおく。

このとき，

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}=\frac{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{{p_n}^2}+1}{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_np_{n+1}}=a_n$$

となるので，$\{a_n\}$は定数数列であるから n によらない。

（証明終）

(2) $a_1=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3$ であるから $a_n=3$ …②となる。

また，①より ${p_{n+1}}^2+1=p_np_{n+2}$ であるから

$a_n=\dfrac{{p_n}^2+p_np_{n+2}}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{p_n+p_{n+2}}{p_{n+1}}$ …③ であり，

②③より $\dfrac{p_n+p_{n+2}}{p_{n+1}}=3$ なので $p_n+p_{n+2}=3p_{n+1}$

したがって $p_{n-1}+p_{n+1}=3p_n$（$n\geqq 2$）

(3) 数学的帰納法により $p_n = q_{2n-1}$ であることを示す。

（ｉ） $n=1$ のとき $p_1=1,\ q_1=1$ であるから成り立つ。

$n=2$ のときも $p_2=2,\ q_3=1+1=2$ より成り立つ。

（ⅱ） $n=k,\ k+1$ のとき成り立つと仮定すると $p_k = q_{2k-1}$， $p_{k+1}=q_{2k+1}$ …④

このとき，(2)より $p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k$ …⑤であり，

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=(q_{2k+1}+q_{2k})+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})$$

$$=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$$

④より $=3p_{k+1}-p_k$ …⑥

⑤，⑥より $p_{k+2}=q_{2k+3}$ であるから $n=k+2$ のときも成り立つ。

（ｉ）(ⅱ)より すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し， $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

（証明終）