[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{4}$]

数列$\{p_n\}$を次のように定める。 $p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2, 3, 4, \cdots$ に対し， $p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。 $q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ （$n=1, 2, 3, \cdots$）

すべての $n=1, 2, 3, \cdots$ に対し， $p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ …① とする。

(1) $a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおく。

このとき， $p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ より ${p_{n+1}}^2+1=p_{n+2}p_n$ であるから

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{{p_{n+2}}^2+p_{n+2}p_n}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}p_n+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=a_n$$

となるので，$\{a_n\}$は定数数列であるから n によらない。

（証明終）

〔別解〕 $a_{n+1}=a_n$ は，以下のように示すこともできる。

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\right)^2+{p_{n+1}}^2+1}{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}=\frac{\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{{p_n}^2}+1}{\dfrac{p_{n+1}}{p_n}}=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_np_{n+1}}=a_n$$

(2) (1)より $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_np_{n+1}}$ は定数であるから，

この式の変形の途中で現れた $\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}$ も定数である。

よって， $n≧2$ のとき $\dfrac{p_{n+1}+p_{n-1}}{p_n}=\dfrac{p_3+p_1}{p_2}=\dfrac{5+1}{2}=3$

したがって $p_{n-1}+p_{n+1}=3p_n$

(3) 数学的帰納法により　$p_n = q_{2n-1}$　であることを示す。

（ｉ）$n=1$ のとき　$p_1 = 1,\ q_1 = 1$　であるから成り立つ。

$n=2$ のときも　$p_2 = 2,\ q_3 = 1+1 = 2$　より成り立つ。

（ⅱ）$n=k,\ k+1$ のとき成り立つと仮定すると　$p_k = q_{2k-1}$，$p_{k+1} = q_{2k+1}$　…④

このとき，(2)より　$p_{k+2} = 3p_{k+1} - p_k$　…⑤であり，

$$q_{2k+3} = q_{2k+2} + q_{2k+1} = (q_{2k+1} + q_{2k}) + q_{2k+1} = 2q_{2k+1} + q_{2k} = 2q_{2k+1} + (q_{2k+1} - q_{2k-1})$$

$$= 3q_{2k+1} - q_{2k-1}$$

④より　$= 3p_{k+1} - p_k$　…⑥

⑤，⑥より　$p_{k+2} = q_{2k+3}$　であるから $n = k+2$ のときも成り立つ。

（ｉ)(ⅱ)より　すべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，　$p_n = q_{2n-1}$　が成り立つ。

（証明終）

〔別解〕

$r_n = q_{2n-1}$　とおく。

このとき，　$r_1 = q_1 = 1$，　$r_2 = q_3 = q_2 + q_1 = 2$

次に，　$n \geqq 2$ のとき，　$q_{n+2} = q_{n+1} + q_n$　を繰り返し用いると

$$r_{n+1} + r_{n-1} = q_{2n+1} + q_{2n-3}$$

$$= (q_{2n} + q_{2n-1}) + q_{2n-3}$$

$$= (q_{2n-1} + q_{2n-2}) + q_{2n-1} + (q_{2n-1} - q_{2n-2})$$

$$= 3q_{2n-1}$$

$$= 3r_n$$

したがって，数列 $\{r_n\}$ と数列 $\{p_n\}$ は一致する。

よって　$p_n = q_{2n-1}$　である。

（証明終）