[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{3}$]

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p$（$x > 0$），$y = \log x$（$x > 0$）を考える。この 2 つの曲線の共有点が1点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

---

(1) $f(x) = ax^p - \log x$（$x > 0$）とおく。

$f(x) = 0$ となる x が 1 つであるための条件を求める。

$f'(x) = apx^{p-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{apx^p - 1}{x}$ より $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	(0)	$\cdots$	$(ap)^{-\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	＋
$f(x)$		↘		↗

$\lim_{x\to+0} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\log x)\left(a \cdot \dfrac{x^p}{\log x} - 1\right) = \infty$ であることに注意すると，

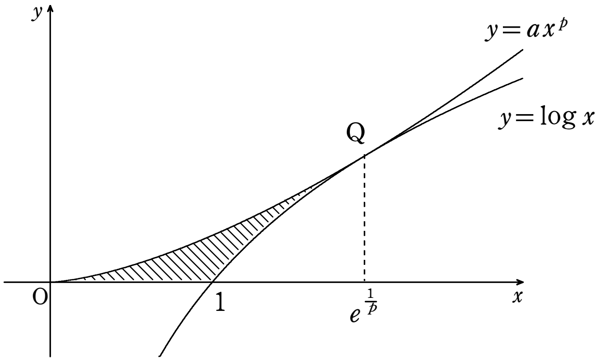
条件を満たすのは $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right) = 0$ のときである。

したがって $f\left((ap)^{-\frac{1}{p}}\right) = a \cdot \dfrac{1}{ap} + \dfrac{1}{p}\log ap = \dfrac{1 + \log ap}{p} = 0$ より

$ap = \dfrac{1}{e} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{ep}$ となる。

また，Q の x 座標は $(ap)^{-\frac{1}{p}} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{-\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p}}$ である。

(2) (1)より $y=ax^p$ の方が上にある。



求める体積を V とすると

$$V=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi\left(ax^p\right)^2dx-\int_1^e\pi(\log x)^2dx$$

ここで，$V_1=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}\pi\left(ax^p\right)^2dx$，$V_2=\int_1^e\pi(\log x)^2dx$ とおくと

$$\frac{V_1}{\pi}=\int_0^{e^{\frac{1}{p}}}a^2x^{2p}dx=\left[\frac{a^2}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^{e^{\frac{1}{p}}}=\frac{a^2}{2p+1}e^{\frac{2p+1}{p}}=\frac{1}{(ep)^2(2p+1)}e^{2+\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}$$

であり，さらに

$$\int_1^e(\log x)^2dx=x(\log x)^2-\int x\cdot 2(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx$$

$$=x(\log x)^2-2(x\log x-x)+C$$ （C は積分定数）となるので

$$\frac{V_2}{\pi}=\left[x\left\{(\log x)^2-2\log x+2\right\}\right]_1^{e^{\frac{1}{p}}}=e^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)-2=\frac{2p^2-2p+1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2$$

である。

したがって

$$V=V_1-V_2$$

$$=\pi\left[\left\{\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}\right\}-\left\{\frac{2p^2-2p+1}{p^2}e^{\frac{1}{p}}-2\right\}\right]$$

$$=\pi\left\{\frac{1-(2p^2-2p+1)(2p+1)}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}+2\right\}$$

$$=2\pi\left(\frac{-2p+1}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+1\right)$$

(3) $V=2\pi$ であるから $-2p+1=0$ より $p=\dfrac{1}{2}$