[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{2}$]

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が1, 2, 3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2, 5, 6, 3, 4であったとすると，得られる文字列はAACDAABとなる。このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) n を2以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ。

---

(1) 1, 2, 3が出たときに書くAAを A_1A_2 とし，2つのAを区別して考える。

n 文字目が A_1 である確率を p_n，A_2 である確率を q_n とおく。

このとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ である。

ここで，$n+1$ 文字目が A_1 となるのは，

n 文字目が A_1 以外の文字で，次にさいころの目1, 2, 3が出るときであるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{2} \iff p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2} \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

したがって $p_n=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right\}$ …① となる。

また，$n\geqq 2$ のとき，n 文字目が A_2 となるのは，$n-1$ 文字目が A_1 であるときなので

$q_n=p_{n-1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ …② となる。

$q_1=0$ より，②は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，求める確率は①，②より

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) $n-1$文字目がA_2であり，次にさいころを投げて4が出るときであるから

求める確率は $q_{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$