[東京大学 2015 年前期 理科 $\boxed{1}$]

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

点 $(x,\ y)$ が C の通過する領域に含まれるための条件は

$y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ …① を満たす正の実数 a が存在すること

である。

①を変形すると $4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2 \iff 4(1-x^2)a^2 + 4ya - 1 = 0$ …②

（ｉ）$1-x^2 = 0$ すなわち $x = \pm 1$ のとき

② $\iff$ $4ya = 1$ となり正の解 a をもつための y の条件は $y > 0$

（ii）$1-x^2 \neq 0$ すなわち $x \neq \pm 1$ のとき

a の２次方程式②が実数解をもつことから，判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4} = (2y)^2 - 4(1-x^2)(-1) = 4(-x^2 + y^2 + 1) \geqq 0$ である。

よって $x^2 - y^2 \leqq 1$ である。このもとで以下考える。

（A）$1-x^2 > 0$ すなわち $-1 < x < 1$ のとき

②の２解の積は $\dfrac{-1}{4(1-x^2)} < 0$ であるから，２解の符号は異なるので適する。

（B）$1-x^2 < 0$ すなわち $x < -1,\ 1 < x$ のとき

②の２解の積は $\dfrac{-1}{4(1-x^2)} > 0$ であるから，

条件は②の２解の和について $-\dfrac{4y}{4(1-x^2)} > 0$ となることである。

よって $y > 0$ となればよい。

以上より，C の通過する領域は図の斜線部である。

ただし，境界線は $x^2 - y^2 = 1,\ y > 0$ の部分のみ含む。