

[東京大学 2015 年前期 理科 1]



正の実数 a に対して、座標平面上で次の放物線を考える。 $C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき、 C の通過する領域を図示せよ。



[東京大学 2015 年前期 理科 2]



どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し、次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ、出た目が1, 2, 3のときは文字列 AA を書き, 4のときは文字 B を, 5のときは文字 C を, 6のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ, 同じ規則に従って, AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば, さいころを5回投げ, その出た目が順に2, 5, 6, 3, 4であったとすると, 得られる文字列は AACDAAB となる。このとき, 左から4番目の文字は D, 5番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回さいころを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を2以上の整数とする。 n 回さいころを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。



[東京大学 2015 年前期 理科 3]



a を正の実数とし、 p を正の有理数とする。座標平面上の2つの曲線 $y = ax^p$ ($x > 0$)、 $y = \log x$ ($x > 0$) を考える。この2つの曲線の共有点が1点のみであるとし、その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい。

- (1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。
- (2) この2つの曲線と x 軸で囲まれる図形を、 x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。
- (3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。



[東京大学 2015 年前期 理科 4]



数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。 $p_1 = 1, p_2 = 2, p_{n+2} = \frac{p_{n+1}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(1) $\frac{p_{n+1}^2 + p_n^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し, $p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。 $q_1 = 1, q_2 = 1, q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $p_n = q_{2n-1}$ を示せ。



[東京大学 2015 年前期 理科 5]



m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。





n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。 $g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。

$|x| \leq \frac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。 $h(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$

このとき、次の極限を求めよ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx$

