[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{1}$]

以下の命題A, Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$

命題B　整数 $n,\ m,\ l$ が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

＜命題A＞ 偽であり，反例は $n=17$ である。

$$\left(\frac{n^3}{26}+100\right)-n^2=\frac{1}{26}(n^3-26n^2+2600)$$ である。

ここで，x を 0 以上の実数とし，$f(x)=x^3-26x^2+2600$ とおく。

$f'(x)=3x^2-52x=3x\left(x-\dfrac{52}{3}\right)$ より，$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$17<\dfrac{52}{3}<18$ より，$f(n)$ が最小となる正の整数 n は，$n=17$ または $n=18$ である。

$f(17)=17^2(17-26)+2600=-1<0$ より $n=17$ が反例となっている。

＜命題B＞ 真であり，証明を以下に記す。

$5n+5m+3l=1$ より $3l=1-5(n+m)$ …① である。

このとき，
$$\begin{aligned}10nm+3ml+3nl&=10nm+3ml+3nl\\&=10nm+3l(m+n)\\&=10nm+\{1-5(n+m)\}(m+n)\\&=n+m-5(n^2+m^2)\end{aligned}$$

$$= -5n\left(n-\frac{1}{5}\right)-5m\left(m-\frac{1}{5}\right) \quad \cdots②$$

ここで，n, m は整数であるから $-5n\left(n-\frac{1}{5}\right) \leqq 0$，$-5m\left(m-\frac{1}{5}\right) \leqq 0$ であり，② $\leqq 0$ となる。

ここで，等号が成立するとすれば，$n = m = 0$ のときに限られるが，

$n = m = 0$ のとき，①より $l = \frac{1}{3}$ となるので l は整数にならず，

② $\leqq 0$ の等号が成立することはない。

したがって ②< 0 となり，命題B は成り立つ。

[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{2}$]

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(ⅰ)または(ⅱ)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(ⅰ) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ⅱ) 点 A, P, B は同一直線上にある。

まず，(ⅰ)の場合について考える。

$\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を通る放物線を $C: y = ax^2 + bx + c$ （$a \neq 0$）とおく。

$\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を通ることから $a - b + c = 1$ かつ $a + b + c = -1$

よって $b = -1$ かつ $a + c = 0$ であるから

$C: y = ax^2 - x - a$ …①

$$= a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} - a \quad \text{となる。}$$

したがって，C の頂点の x 座標は $\dfrac{1}{2a}$ であり，条件より $\left|\dfrac{1}{2a}\right| \geqq 1$ から $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$

ここで，(ⅱ)の場合について考えると，点 A, P, B が同一直線上にあるのは，P が線分 AB 上にあるときで，これは①において $a = 0$ としたときの場合に相当する。

よって，$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のときの $y = ax^2 - x - a$ （$-1 \leqq x \leqq 1$）の通過領域が求めるものである。

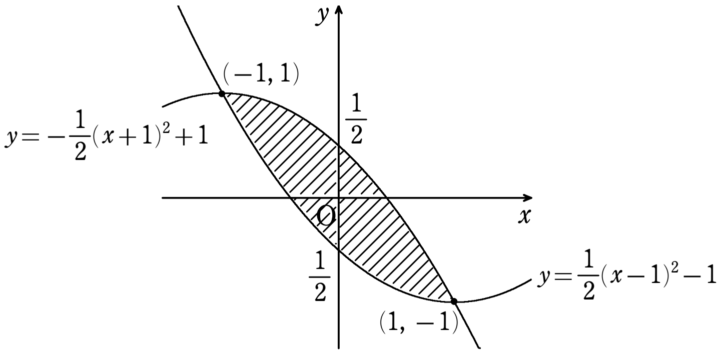
$-1 < x < 1$ なる x に対し，$x^2 - 1 < 0$ より $y = a(x^2 - 1) - x$ は a に関して減少関数であるから

求める領域は $a = \pm\dfrac{1}{2}$ のときの 2 つの曲線で囲まれた領域になる。

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 1$，$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 1$ であるから

求める領域は図の斜線部である。

ただし，境界線を含む。



その面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}(x-1)^2-1\right)\right\}dx=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3$$

$$=\frac{4}{3}$$

［ 東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{3}$ ］

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。

さらに，以下の３条件(ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)で定まる円 C_1, C_2 を考える。

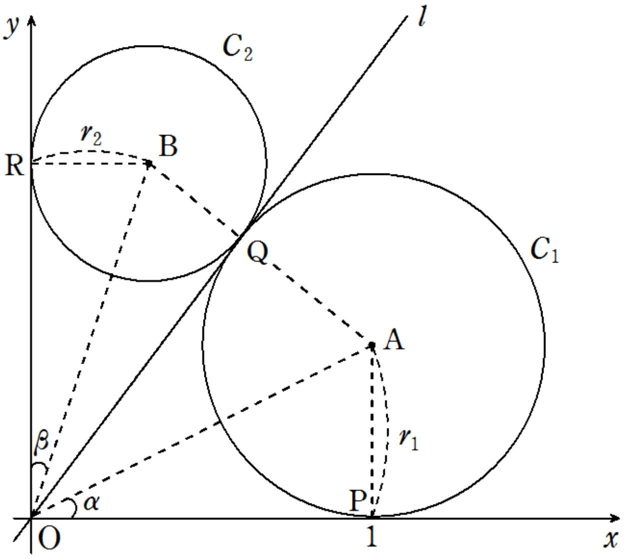
(ｉ) 円 C_1, C_2 は２つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ⅱ) 円 C_1, C_2 は直線 l と同一点で接する。

(ⅲ) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

図のように中心 A, B，接点 P, Q, R，角 α, β を定める。



$\triangle$OAP から $r_1=\tan\alpha$ であり，$\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=1$ と $\triangle$OBR から $r_2=\tan\beta$ である。

また，$\angle\mathrm{POR}=2\alpha+2\beta$ が $\dfrac{\pi}{2}$ に等しいことから $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ である。

よって，$8r_1+9r_2=8\tan\alpha+9\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$$=8\tan\alpha+9\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}$$

$$=8\tan\alpha+9\cdot\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} \quad \cdots①$$

ここで，$\tan\alpha = t$ とおくと，

$$①=8t+9\cdot\frac{1-t}{1+t}=8t-9+\frac{18}{1+t}=8(1+t)+\frac{18}{1+t}-17$$

であり，$t>0$ より $1+t>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$8(1+t)+\frac{18}{1+t}-17 \geqq 2\sqrt{8(1+t)\cdot\frac{18}{1+t}}-17=24-17=7$$

等号成立は $8(1+t)=\dfrac{18}{1+t}$ のときで，$1+t>0$ より $1+t=\dfrac{3}{2}$ から $t=\dfrac{1}{2}$ のとき。

このとき，l の傾きは $\tan 2\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{4}{3}>0$ であるから

$8r_1+9r_2$ は $l: y=\dfrac{4}{3}x$ のときに最小値 7 をとる。

[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{4}$]

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く。コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを5回投げ，その結果が表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は $\mathrm{AABBAAB}$ となる。このとき，左から4番目の文字は B，5番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を2以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

---

(1) 表が出たときに書く AA を $\mathrm{A_1A_2}$ とし，２つの A を区別して考える。

n 文字目が $\mathrm{A_1}$ である確率を p_n，$\mathrm{A_2}$ である確率を q_n とおく。

このとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ である。

ここで，$n+1$ 文字目が $\mathrm{A_1}$ となるのは，

n 文字目が $\mathrm{A_1}$ 以外の文字で，次にコインの表が出るときであるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{2} \iff p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2} \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

したがって $p_n=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ …① となる。

また，$n\geqq 2$ のとき，n 文字目が $\mathrm{A_2}$ となるのは，$n-1$ 文字目が $\mathrm{A_1}$ であるときなので

$q_n=p_{n-1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ …② となる。

$q_1=0$ より，②は $n=1$ でも成り立つ。

したがって，求める確率は①，②より

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) $n-1$文字目がA_2であり，次にコインを投げて裏が出るときであるから

求める確率は $q_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$