[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{4}$]

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを1枚用意し，次のように左から順に文字を書く。コインを投げ，表が出たときは文字列AAを書き，裏が出たときは文字Bを書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, Bをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを5回投げ，その結果が表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は$\mathrm{AABBAAB}$となる。このとき，左から4番目の文字はB，5番目の文字はAである。

(1) nを正の整数とする。n回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左からn番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2) nを2以上の整数とする。n回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字がAで，かつn番目の文字がBとなる確率を求めよ。

(1) 表が出たときに書くAAを$\mathrm{A_1A_2}$とし，2つのAを区別して考える。

n文字目が$\mathrm{A_1}$である確率をp_n，$\mathrm{A_2}$である確率をq_nとおく。

このとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ である。

ここで，$n+1$文字目が$\mathrm{A_1}$となるのは，

n文字目が$\mathrm{A_1}$以外の文字で，次にコインの表が出るときであるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\cdot\frac{1}{2} \iff p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2} \iff p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

したがって $p_n=\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ …① となる。

また，$n\geqq 2$のとき，n文字目が$\mathrm{A_2}$となるのは，$n-1$文字目が$\mathrm{A_1}$であるときなので

$q_n=p_{n-1}=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ …② となる。

$q_1=0$より，②は$n=1$でも成り立つ。

したがって，求める確率は①，②より

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

（2）$n-1$文字目がA_2であり，次にコインを投げて裏が出るときであるから

求める確率は $q_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$