［ 東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{3}$ ］

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。

さらに，以下の３条件(ⅰ)，(ⅱ)，(ⅲ)で定まる円 $C_1,\ C_2$ を考える。

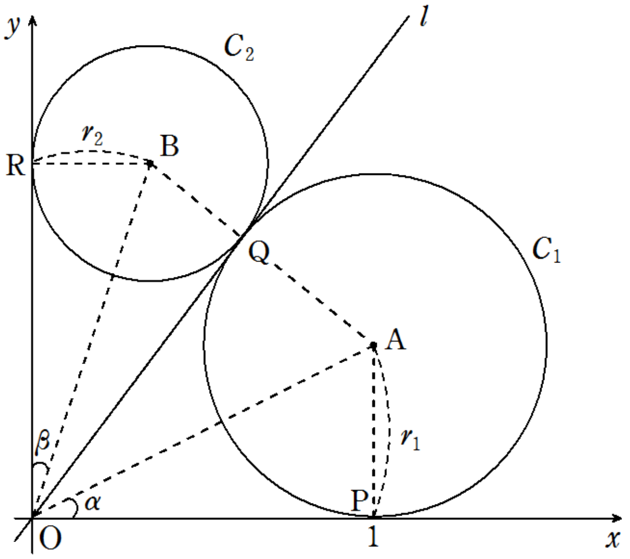
（ⅰ）円 $C_1,\ C_2$ は２つの不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

（ⅱ）円 $C_1,\ C_2$ は直線 l と同一点で接する。

（ⅲ）円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

図のように中心 A, B，接点 P, Q, R，角 $\alpha,\ \beta$ を定める。



△OAP から $r_1=\tan\alpha$ であり，$\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=1$ と△OBR から $r_2=\tan\beta$ である。

また，$\angle\mathrm{POR}=2\alpha+2\beta$ が $\dfrac{\pi}{2}$ に等しいことから $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ である。

よって，$8r_1+9r_2=8\tan\alpha+9\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$$=8\tan\alpha+9\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}$$

$$=8\tan\alpha+9\cdot\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}\quad\cdots①$$

ここで，$\tan\alpha = t$ とおくと，

$$①=8t+9\cdot\frac{1-t}{1+t}=8t-9+\frac{18}{1+t}=8(1+t)+\frac{18}{1+t}-17$$

であり，$t>0$ より $1+t>0$ であるから，相加・相乗平均の不等式より

$$8(1+t)+\frac{18}{1+t}-17 \geqq 2\sqrt{8(1+t)\cdot\frac{18}{1+t}}-17=24-17=7$$

等号成立は $8(1+t)=\dfrac{18}{1+t}$ のときで，$1+t>0$ より $1+t=\dfrac{3}{2}$ から $t=\dfrac{1}{2}$ のとき。

このとき，l の傾きは $\tan 2\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{4}{3}>0$ であるから

$8r_1+9r_2$ は $l: y=\dfrac{4}{3}x$ のときに最小値 7 をとる。