[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{2}$]

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(ⅰ)または(ⅱ)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(ⅰ) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ⅱ) 点 A, P, B は同一直線上にある。

まず，(ⅰ)の場合について考える。

$\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を通る放物線を $C: y = ax^2 + bx + c$ （$a \neq 0$）とおく。

$\mathrm{A}(-1, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1)$ を通ることから $a - b + c = 1$ かつ $a + b + c = -1$

よって $b = -1$ かつ $a + c = 0$ であるから

$C: y = ax^2 - x - a$ …①

$$= a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} - a \text{ となる。}$$

したがって，C の頂点の x 座標は $\dfrac{1}{2a}$ であり，条件より $\left|\dfrac{1}{2a}\right| \geqq 1$ から $|a| \leqq \dfrac{1}{2}$

ここで，(ⅱ)の場合について考えると，点 A, P, B が同一直線上にあるのは，P が線分 AB 上にあるときで，これは①において $a = 0$ としたときの場合に相当する。

よって，$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のときの $y = ax^2 - x - a$ （$-1 \leqq x \leqq 1$）の通過領域が求めるものである。

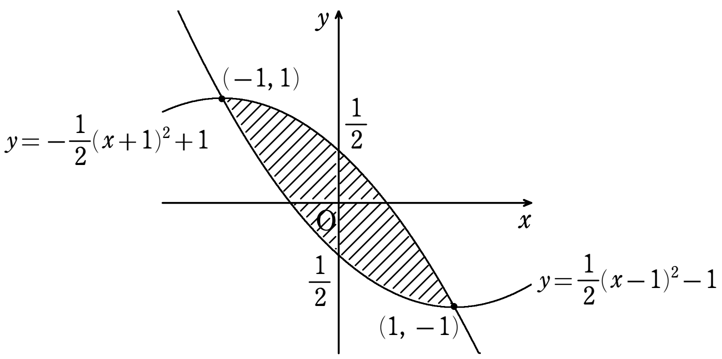
$-1 < x < 1$ なる x に対し，$x^2 - 1 < 0$ より $y = a(x^2 - 1) - x$ は a に関して減少関数であるから

求める領域は $a = \pm\dfrac{1}{2}$ のときの 2 つの曲線で囲まれた領域になる。

$a = \dfrac{1}{2}$ のとき $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 1$，$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき $y = -\dfrac{1}{2}(x+1)^2 + 1$ であるから

求める領域は図の斜線部である。

ただし，境界線を含む。



その面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right)-\left(\frac{1}{2}(x-1)^2-1\right)\right\}dx=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3$$

$$=\frac{4}{3}$$