[東京大学 2015 年前期 文科 $\boxed{1}$]

以下の命題A, Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$

命題B　整数 $n,\ m,\ l$ が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

＜命題A＞ 偽であり，反例は $n=17$ である。

$\left(\dfrac{n^3}{26}+100\right)-n^2=\dfrac{1}{26}(n^3-26n^2+2600)$ である。

ここで，x を 0 以上の実数とし，$f(x)=x^3-26x^2+2600$ とおく。

$f'(x)=3x^2-52x=3x\left(x-\dfrac{52}{3}\right)$ より，$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$17<\dfrac{52}{3}<18$ より，$f(n)$ が最小となる正の整数 n は，$n=17$ または $n=18$ である。

$f(17)=17^2(17-26)+2600=-1<0$ より $n=17$ が反例となっている。

＜命題B＞ 真であり，証明を以下に記す。

$5n+5m+3l=1$ より $3l=1-5(n+m)$ $\cdots$① である。

このとき，$10nm+3ml+3nl=10nm+3ml+3nl$

$$\begin{aligned}&=10nm+3l(m+n)\\&=10nm+\{1-5(n+m)\}(m+n)\\&=n+m-5(n^2+m^2)\end{aligned}$$

$$=-5n\left(n-\frac{1}{5}\right)-5m\left(m-\frac{1}{5}\right) \quad \cdots②$$

ここで，n, m は整数であるから $-5n\left(n-\frac{1}{5}\right)\leqq 0$，$-5m\left(m-\frac{1}{5}\right)\leqq 0$ であり，② $\leqq 0$ となる。

ここで，等号が成立するとすれば，$n=m=0$ のときに限られるが，

$n=m=0$ のとき，①より $l=\frac{1}{3}$ となるので l は整数にならず，

② $\leqq 0$ の等号が成立することはない。

したがって ②<0 となり，命題 B は成り立つ。