

[東京大学 2015 年前期 文科 1]



以下の命題 A, B それぞれに対し, その真偽を述べよ。また, 真ならば証明を与え, 偽ならば反例を与えよ。

命題 A n が正の整数ならば, $\frac{n^3}{26} + 100 \geq n^2$

命題 B 整数 n, m, l が $5n + 5m + 3l = 1$ をみたすならば, $10nm + 3ml + 3nl < 0$ が成り立つ。



[東京大学 2015 年前期 文科 2]



座標平面上の2点 $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$ を考える。また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。



[東京大学 2015 年前期 文科 3]



l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。

さらに、以下の3条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1, C_2 を考える。

(i) 円 C_1, C_2 は2つの不等式 $x \geq 0, y \geq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1, C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し、円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1 、円 C_2 の半径を r_2 とする。 $8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と、その最小値を求めよ。



[東京大学 2015 年前期 文科 4]



投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを1枚用意し、次のように左から順に文字を書く。コインを投げ、表が出たときは文字列 AA を書き、裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ、同じ規則に従って、AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば、コインを5回投げ、その結果が表, 裏, 裏, 表, 裏であったとすると、得られる文字列は AABBAAB となる。このとき、左から4番目の文字は B, 5番目の文字は A である。

- (1) n を正の整数とする。 n 回コインを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。
- (2) n を2以上の整数とする。 n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

