[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{1}$]

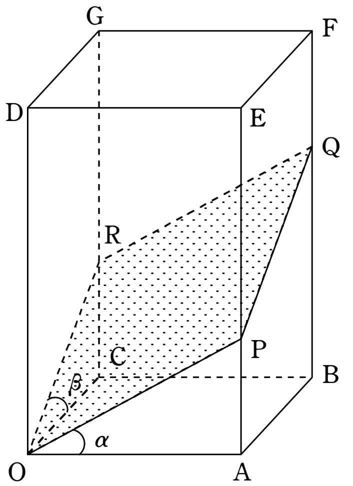
1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 $\mathrm{OABC}-\mathrm{DEFG}$ を考える。

3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle\mathrm{AOP}$ を α，$\angle\mathrm{COR}$ を β とおく。

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4},\ S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



(1) O を原点とし，$\mathrm{A}(1,0,0)$，$\mathrm{B}(1,1,0)$，$\mathrm{C}(0,1,0)$ となるように座標を考える。

このとき，$\mathrm{P}(1,0,\tan\alpha)$，$\mathrm{R}(0,1,\tan\beta)$ と表せる。

四角形 OPQR は平行四辺形であるから

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$

$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2) $S=\dfrac{7}{6}$ より $\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=\dfrac{7}{6}$

したがって $\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$ …①

$\tan\alpha+\tan\beta=s$， $\tan\alpha\tan\beta=t$ とおくと

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $s>0,\ t>0$ で，

① $\Leftrightarrow$ $(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{13}{36}$

$\Leftrightarrow$ $s^2-2t=\dfrac{13}{36}$ …②

また， $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{s}{1-t}=1$ より $s=1-t$ …③

②，③より $s^2-2(1-s)=\dfrac{13}{36}$ $\Leftrightarrow$ $36s^2+72s-85=0$

$\Leftrightarrow$ $(6s+17)(6s-5)=0$

$s>0$ より $s=\dfrac{5}{6}$ したがって $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$

このとき③より $t=\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$ であるから

$\tan\alpha,\ \tan\beta$ は 2 次方程式 $u^2-\dfrac{5}{6}u+\dfrac{1}{6}=0$ …④ の 2 解である。

④ $\Leftrightarrow$ $6u^2-5u+1=0$ $\Leftrightarrow$ $(3u-1)(2u-1)=0$ より $u=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$

$0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha\leqq\tan\beta$ であるから $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{2}$]

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作（＊）を考える。

（＊）袋 U から球を 1 個取り出し，

（ⅰ）取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

（ⅱ）取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っていたとする。この袋 U に対して操作（＊）を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

---

(1) p_1 ： $a+3$ 個の球から1個の赤球を取り出す確率なので $p_1=\dfrac{1}{a+3}$

p_2 :1 回目に赤球を取り出した場合，U の中に赤球がなく，2 回目に赤球を取り出すことはない。

1 回目に白球を取り出した場合，その確率は $\dfrac{a+2}{a+3}$ で，2 回目に赤球を取り出すのは $a+1$ 個の球から1個の赤球を取り出すので，その確率は $\dfrac{1}{a+1}$ である。

したがって， $p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2) n 回目に赤球を取り出していると，U の中に赤球がなく，$n+1$回目に赤球を取り出すことはない。

よって， $n+1$回目に取り出した球が赤球であるのは， n 回目に白球を取り出し，さらに$n+1$回目

に赤球を取り出す場合である。

したがって，$p_{n+1}=(1-p_n)\times\dfrac{1}{a+1}$ （n≧1）…① が成り立つ。

①は $p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ と変形でき，

$$p_{n+1}-\frac{1}{a+2}=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^2\left(p_{n-1}-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\cdots$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{a+2}+\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+2}\right)$ （n≧1）

(3) $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{n=1}^{m}p_n=\dfrac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\left\{\dfrac{1}{a+2}+\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+2}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{m}{a+2}+\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)}$$

であり，a≧1 より $\left|-\dfrac{1}{a+1}\right|<1$ であるから $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}$

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{3}$]

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 1$$

$$C_2 : y = (x-u)^2 + u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1, y_1), \mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ とする。

ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。

$2|x_1y_2 - x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。

定積分 $I = \int_a^b f(u)\,du$ を求めよ。

---

(1) $C_1 : y = -x^2 + 1$ …①，$C_2 : y = (x-u)^2 + u$ …②

①，②を連立して $-x^2 + 1 = (x-u)^2 + u \iff 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 = 0$ …③

③の判別式を D とすると，C_1 と C_2 が共有点をもつとき，$D \geqq 0$ であるから

$$\frac{D}{4} = u^2 - 2(u^2 + u - 1) \geqq 0 \iff u^2 + 2u - 2 \leqq 0$$

よって $-1-\sqrt{3} \leqq u \leqq -1+\sqrt{3}$ となるので，$a = -1-\sqrt{3}$，$b = -1+\sqrt{3}$

(2) $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1\left(-x_2{}^2 + 1\right) - x_2\left(-x_1{}^2 + 1\right) = \left(x_1 - x_2\right)\left(x_1x_2 + 1\right)$ である。

ここで，③の 2 解が x_1, x_2 であるから，解と係数の関係より

$x_1 + x_2 = u$，$x_1x_2 = \dfrac{u^2 + u - 1}{2}$ であり，

$\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = u^2 - 4 \cdot \dfrac{u^2 + u - 1}{2} = -u^2 - 2u + 2$ であるから

$$2|x_1y_2-x_2y_1|=2|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)|$$

$$=2|(x_1-x_2)||(x_1x_2+1)|$$

$$=2\sqrt{-u^2-2u+2}\left|\frac{u^2+u-1}{2}+1\right|$$

$$=\sqrt{-u^2-2u+2}\left(u^2+u+1\right)$$

（3） $f(u)=\sqrt{-u^2-2u+2}\left(u^2+u+1\right)$ である。

$f(u)=\sqrt{-(u+1)^2+3}\left(u^2+u+1\right)$ であり，$u+1=t$ とおくと

$f(t)=\sqrt{-t^2+3}\left(t^2-t+1\right)$ となるので，

$$I=\int_a^b f(u)\,du=\int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} f(u)\,du$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{-t^2+3}\left(t^2-t+1\right)dt$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{-t^2+3}\left(t^2+1\right)-t\sqrt{-t^2+3}\right\}dt$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{-t^2+3}\left(t^2+1\right)dt$$

ここで，$t=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，$dt=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$，

$t:0\to\sqrt{3}$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-3\sin^2\theta+3}\left(3\sin^2\theta+1\right)\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2\theta\left(3\sin^2\theta+1\right)d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{3\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta\right\}d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{4}\sin^2 2\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4\theta}{2}+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=6\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 4\theta}{8}\right)+\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=6\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{21}{8}\pi$$

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$p,\ q$ は実数の定数で，$0<p<1,\ q>0$ をみたすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0<x_0<1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 $x_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ を，

$$x_n=f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p>q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

となることを示せ。

(3) $p<q$ であるとき，

$$c=f(c),\ 0<c<1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

(1) $0<p<1,\ q>0$ であるから $0<x<1$ のとき

$0<1-p<1$ の辺々に x を掛けて $0<(1-p)x<x$ …①

$0<1-e^{-qx}<1$ の辺々に $1-x$（>0）を掛けて $0<(1-x)(1-e^{-qx})<1-x$ …②

①，②を辺々加えて $0<(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})<x+1-x=1$

したがって $0<f(x)<1$ が成り立つ。

(2) $0<x_0<1$ であるから，(1)の結果より $0<x_n<1$（$n=0,1,2,3,\cdots$）…③ である。

$1+x \leqq e^x$ において x を $-qx$ として

$1-qx \leqq e^{-qx} \Leftrightarrow 1-e^{-qx} \leqq qx$ を得る。

辺々に $1-x$（>0）を掛けて $(1-x)(1-e^{-qx}) \leqq qx(1-x)$

これと $qx>0$ より $f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$

$$\leqq (1-p)x+qx(1-x)$$

$$=\left(1-p+q-qx\right)$$

$$<x(1-p+q)$$

よって $f(x_n)<x_n(1-p+q) \Leftrightarrow x_{n+1}<(1-p+q)x_n$ となる。

これと③より $x_n<(1-p+q)^n x_0$ すなわち $0<x_n<(1-p+q)^n x_0$ …④ となる。

ここで，$1-p+q=1-(p-q)$ であり

$0<p<1$，$p>q$ より $0<1-p+q<1$ であるから $\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^n=0$

よって，④においてはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となる。

(3) $g(x)=x-f(x)$ とおく。

$g(0)=-f(0)=0$ …⑤

$g(1)=1-f(1)=1-(1-p)=p>0$ …⑥

である。

ここで，$g'(x)=1-f'(x)$

$$=1-(1-p)+(1-e^{-qx})-qe^{-qx}(1-x)$$

$$=p+(1-e^{-qx})-qe^{-qx}(1-x)$$

であり，$g'(0)=p-q<0$ …⑦ となる。

⑤，⑥，⑦より $0<x<1$ において $g(x)<0$ となる x の範囲が存在する。

よって，$g(c)=0$，$0<c<1 \Leftrightarrow c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在する。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{5}$]

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり， a_n を p で割った余りを b_n とする。

ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し， b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2,\ p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して， b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき， $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) $a_2, a_3, a_4, \cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき， a_1 も p で割り切れないことを示せ。

---

(1) a_n を p で割ったときの商を c_n とおくと

$$\begin{cases} a_{n+2} = pc_{n+2} + b_{n+2} \\ a_{n+1} = pc_{n+1} + b_{n+1} \\ a_n = pc_n + b_n \end{cases}$$ となる。

したがって $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$

$$= \left(pc_{n+1} + b_{n+1}\right)\left(pc_n + b_n + 1\right)$$

$$= p^2 c_{n+1}c_n + pb_n c_{n+1} + pb_{n+1}c_n + b_{n+1}(b_n+1)$$

$$= p\left(pc_{n+1}c_n + b_n c_{n+1} + b_{n+1}c_n\right) + b_{n+1}(b_n+1) \quad \cdots①$$

a_{n+2} を p で割った余りが b_{n+2} であり，

①よりそれは $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

よって題意は示された。

(2) $r=2$ より $a_1=2$，$a_2=3$ である。

$p=17$ であるから $b_1=2, b_2=3$ であり，

$b_2\left(b_1+1\right)=3(2+1)=9$ より $b_3=9$

$b_3\left(b_2+1\right)=9(3+1)=36$ より $b_4=2$

$b_4\left(b_5+1\right)=2(9+1)=20$ より $b_5=3$

以下同様であり，$b_n=\begin{cases}2 & (n=1,\ 4,\ 7,\ 10) \\ 3 & (n=2,\ 5,\ 8) \\ 9 & (n=3,\ 6,\ 9)\end{cases}$

(3) (1)より b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致するので，

$b_{n+1}(b_n+1)=pd_n+b_{n+2}$ …②，$b_{m+1}(b_m+1)=pd_m+b_{m+2}$ …③ （$d_n,\ d_m$ は整数）

と表すことができる。

$b_{n+1}=b_{m+1},\ b_{n+2}=b_{m+2}$ であるから，②－③より $b_{n+1}(b_n-b_m)=p(d_n-d_m)$

ここで，右辺は素数 p の倍数であり，$0<b_{n+1}<p$，$-p<b_n-b_m<p$ であるから

$b_n-b_m=0$ でなければならない。

したがって $b_n=b_m$ が成り立つ。

(4) $b_1\neq 0$ であることを示せばよい。

$a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots$ に p で割り切れる数が現れないことから $n\geqq 2$ に対し，$0<b_n<p$ である。

$(b_{n+1},\ b_{n+2})$ の組を考えると，組の総数は $(p-1)^2$ 以下である。

したがって，$2\leqq k<\ell$ かつ $(b_{k+1},\ b_{k+2})=(b_{\ell+1},\ b_{\ell+2})$ を満たす自然数 $k,\ \ell$ が存在する。

このとき，(3)より $b_k=b_\ell$ が成立する。

したがって，帰納的に $b_1=b_{\ell-k+1}$ となるが，

$\ell-k>0$ より $\ell-k+1\geqq 2$ なので，$b_{\ell-k+1}>0$ すなわち $b_{\ell-k+1}\neq 0$

よって，$b_1>0$ すなわち $b_1\neq 0$ となるから，a_1 は p で割り切れない。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}x\ \ (0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x\ \ (-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

---

(1) P の x 座標を p（$0\leqq p\leqq 2$），Q の x 座標を q（$-2\leqq q\leqq 0$）とおくと

$\mathrm{OP}=2p,\ \mathrm{OQ}=-2q$ である。

したがって $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 \Leftrightarrow 2p-2q=6$

$\Leftrightarrow q=p-3 \ \cdots$①

$p,\ q$ について $0\leqq p\leqq 2,\ -2\leqq q\leqq 0 \ \cdots$② であるが，

①かつ②より $p,\ q$ について $1\leqq p\leqq 2,\ q=p-3 \ \cdots$③ である。

直線 PQ の方程式は $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}p-\left(-\sqrt{3}q\right)}{p-q}(x-p)$ で，

②より q を消去すると $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}(x-p)$

$\Leftrightarrow 3y-3\sqrt{3}p=\sqrt{3}(2p-3)(x-p)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(2p-3)x-3y-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0 \ \cdots$④

④の通過する領域を D' とする。

「$0\leqq s\leqq 2$ のとき，点 $(s,\ t)$ が D' に含まれる」

$\Leftrightarrow$「$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0$ かつ $1\leqq p\leqq 2$ を満たす p が存在する」…（＊）

である。

$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}p^2-(2\sqrt{3}s+6)p+3t+3\sqrt{3}s=0$

$\Leftrightarrow 2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s=0 \ \cdots$⑤

であり， $f(p)=2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s$ とおくと

$f(p)=2\left(p-\dfrac{s+3}{2}\right)^2-\dfrac{(s+3)^2}{2}+\sqrt{3}t+3s$ となる。

$0\leqq s\leqq 2$ より $\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ である。

$y=f(p)$ のグラフの軸の位置により場合分けをする。

（ｉ）$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$ すなわち $0\leqq s\leqq 1$ のとき

（＊）となる条件は，⑤の判別式を D として

「$\dfrac{D}{4}=(s+3)^2-2\left(\sqrt{3}t+3s\right)\geqq 0$」かつ「$f(1)\geqq 0$ または $f(2)\geqq 0$」

であるから

「$t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$」かつ「$t\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ または $t\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑥

（ⅱ）$2<\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ すなわち $1<s\leqq 2$ のとき

（＊）となる条件は，

「$f(1)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 0$」

であるから

「$t\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ かつ $t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑦

線分PQは $y=\sqrt{3}x$， $y=-\sqrt{3}x$ の上または上側にあるので $t\geqq\sqrt{3}s,\ t\geqq-\sqrt{3}s$ …⑧

したがって，「⑥または⑦」かつ⑧を満たす t を求めればよく，

$$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1)\\[2ex] \sqrt{3}s\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} & (1\leqq s\leqq 2)\end{cases}$$

となる。

(2) P, Q の対称性から，D は y 軸に関して対称な領域である。

よって，(1)の結果を図示すると次の打点部分になる。ただし，境界上の点はすべて含む。