[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

---

(1) P の x 座標を p（$0 \leqq p \leqq 2$），Q の x 座標を q（$-2 \leqq q \leqq 0$）とおくと

$\mathrm{OP}=2p,\ \mathrm{OQ}=-2q$ である。

したがって $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 \Leftrightarrow 2p-2q=6$

$\Leftrightarrow q=p-3$ …①

p, q について $0 \leqq p \leqq 2,\ -2 \leqq q \leqq 0$ …② であるが，

①かつ②より p, q について $1 \leqq p \leqq 2,\ q=p-3$ …③ である。

直線 PQ の方程式は $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}p-\left(-\sqrt{3}q\right)}{p-q}(x-p)$ で，

②より q を消去すると $y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}(2p-3)}{3}(x-p)$

$\Leftrightarrow 3y-3\sqrt{3}p=\sqrt{3}(2p-3)(x-p)$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}(2p-3)x-3y-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0$ …④

④の通過する領域を D' とする。

「$0 \leqq s \leqq 2$ のとき，点 (s, t) が D' に含まれる」

$\Leftrightarrow$「$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0$ かつ $1 \leqq p \leqq 2$ を満たす p が存在する」…（＊）

である。

$\sqrt{3}(2p-3)s-3t-2\sqrt{3}p^2+6\sqrt{3}p=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}p^2-(2\sqrt{3}s+6)p+3t+3\sqrt{3}s=0$

$\Leftrightarrow 2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s=0$ …⑤

であり， $f(p)=2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}t+3s$ とおくと

$$f(p)=2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2-\frac{(s+3)^2}{2}+\sqrt{3}t+3s$$ となる。

$0\leqq s\leqq 2$ より $\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ である。

$y=f(p)$ のグラフの軸の位置により場合分けをする。

（ｉ）$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$ すなわち $0\leqq s\leqq 1$ のとき

（＊）となる条件は，⑤の判別式を D として

「$\dfrac{D}{4}=(s+3)^2-2\left(\sqrt{3}t+3s\right)\geqq 0$」かつ「$f(1)\geqq 0$ または $f(2)\geqq 0$」

であるから

「$t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$」かつ「$t\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ または $t\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑥

（ii）$2<\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ すなわち $1<s\leqq 2$ のとき

（＊）となる条件は，

「$f(1)\geqq 0$ かつ $f(2)\leqq 0$」

であるから

「$t\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ かつ $t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$」 …⑦

線分PQは $y=\sqrt{3}x$， $y=-\sqrt{3}x$ の上または上側にあるので $t\geqq\sqrt{3}s,\ t\geqq-\sqrt{3}s$ …⑧

したがって，「⑥または⑦」かつ⑧を満たす t を求めればよく，

$$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (0\leqq s\leqq 1)\\ \sqrt{3}s\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} & (1\leqq s\leqq 2)\end{cases}$$

となる。

(2) P, Q の対称性から，D は y 軸に関して対称な領域である。

よって，(1)の結果を図示すると次の打点部分になる。ただし，境界上の点はすべて含む。