

[ 東京大学 2014 年前期 理科 5 ]



$r$  を 0 以上の整数とし、数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。

$$a_1 = r, a_2 = r+1, a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

また、素数  $p$  を 1 つとり、 $a_n$  を  $p$  で割った余りを  $b_n$  とする。

ただし、0 を  $p$  で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数  $n$  に対し、 $b_{n+2}$  は  $b_{n+1}(b_n + 1)$  を  $p$  で割った余りと一致することを示せ。

(2)  $r=2, p=17$  の場合に、10 以下のすべての自然数  $n$  に対して、 $b_n$  を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数  $n, m$  に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき、 $b_n = b_m$  が成り立つことを示せ。

(4)  $a_2, a_3, a_4, \dots$  に  $p$  で割り切れる数が現れないとする。このとき、 $a_1$  も  $p$  で割り切れないことを示せ。

