[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{4}$]

p, q は実数の定数で，$0<p<1,\ q>0$ をみたすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0<x_0<1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 $x_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を，

$$x_n=f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p>q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

となることを示せ。

(3) $p<q$ であるとき，

$$c=f(c),\ 0<c<1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

(1) $0<p<1,\ q>0$ であるから $0<x<1$ のとき

$0<1-p<1$ の辺々に x を掛けて $0<(1-p)x<x$ …①

$0<1-e^{-qx}<1$ の辺々に $1-x$（>0）を掛けて $0<(1-x)(1-e^{-qx})<1-x$ …②

①，②を辺々加えて $0<(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})<x+1-x=1$

したがって $0<f(x)<1$ が成り立つ。

(2) $0<x_0<1$ であるから，(1)の結果より $0<x_n<1$（$n=0, 1, 2, 3, \cdots$）…③ である。

$1+x \leqq e^x$ において x を $-qx$ として

$1-qx \leqq e^{-qx} \Leftrightarrow 1-e^{-qx} \leqq qx$ を得る。

辺々に $1-x$（>0）を掛けて $(1-x)(1-e^{-qx}) \leqq qx(1-x)$

これと $qx>0$ より $f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$

$\leqq(1-p)x+qx(1-x)$

$=\left(1-p+q-qx\right)$

$<x(1-p+q)$

よって $f(x_n)<x_n(1-p+q)$ ⇔ $x_{n+1}<(1-p+q)x_n$ となる。

これと③より $x_n<(1-p+q)^n x_0$ すなわち $0<x_n<(1-p+q)^n x_0$ …④ となる。

ここで，$1-p+q=1-(p-q)$ であり

$0<p<1$，$p>q$ より $0<1-p+q<1$ であるから $\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^n=0$

よって，④においてはさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となる。

(3) $g(x)=x-f(x)$ とおく。

$g(0)=-f(0)=0$ …⑤

$g(1)=1-f(1)=1-(1-p)=p>0$ …⑥

である。

ここで，$g'(x)=1-f'(x)$

$=1-(1-p)+(1-e^{-qx})-qe^{-qx}(1-x)$

$=p+(1-e^{-qx})-qe^{-qx}(1-x)$

であり，$g'(0)=p-q<0$ …⑦ となる。

⑤，⑥，⑦より $0<x<1$ において $g(x)<0$ となる x の範囲が存在する。

よって，$g(c)=0$，$0<c<1$ ⇔ $c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在する。