[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{3}$]

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 1$$

$$C_2 : y = (x-u)^2 + u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 $a,\ b$ により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1),\ \mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。

$2|x_1y_2 - x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。

定積分 $I = \int_a^b f(u)\,du$ を求めよ。

---

(1) $C_1 : y = -x^2 + 1 \ \cdots$①，$C_2 : y = (x-u)^2 + u \ \cdots$②

①，②を連立して $-x^2 + 1 = (x-u)^2 + u \iff 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 = 0 \ \cdots$③

③の判別式を D とすると，C_1 と C_2 が共有点をもつとき，$D \geqq 0$ であるから

$$\frac{D}{4} = u^2 - 2(u^2 + u - 1) \geqq 0 \iff u^2 + 2u - 2 \leqq 0$$

よって $-1-\sqrt{3} \leqq u \leqq -1+\sqrt{3}$ となるので，$a = -1-\sqrt{3}$，$b = -1+\sqrt{3}$

(2) $x_1y_2 - x_2y_1 = x_1\left(-x_2{}^2 + 1\right) - x_2\left(-x_1{}^2 + 1\right) = \left(x_1 - x_2\right)\left(x_1x_2 + 1\right)$ である。

ここで，③の 2 解が $x_1,\ x_2$ であるから，解と係数の関係より

$x_1 + x_2 = u$，$x_1x_2 = \dfrac{u^2 + u - 1}{2}$ であり，

$\left(x_1 - x_2\right)^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = u^2 - 4\cdot\dfrac{u^2 + u - 1}{2} = -u^2 - 2u + 2$ であるから

$$2|x_1y_2-x_2y_1|=2|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)|$$

$$=2|(x_1-x_2)||(x_1x_2+1)|$$

$$=2\sqrt{-u^2-2u+2}\left|\frac{u^2+u-1}{2}+1\right|$$

$$=\sqrt{-u^2-2u+2}\left(u^2+u+1\right)$$

（3）$f(u)=\sqrt{-u^2-2u+2}\left(u^2+u+1\right)$ である。

$f(u)=\sqrt{-(u+1)^2+3}\left(u^2+u+1\right)$ であり，$u+1=t$ とおくと

$f(t)=\sqrt{-t^2+3}\left(t^2-t+1\right)$ となるので，

$$I=\int_a^b f(u)\,du=\int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} f(u)\,du$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{-t^2+3}\left(t^2-t+1\right)dt$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{-t^2+3}\left(t^2+1\right)-t\sqrt{-t^2+3}\right\}dt$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{-t^2+3}\left(t^2+1\right)dt$$

ここで，$t=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，$dt=\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$，

$t:0\to\sqrt{3}$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{-3\sin^2\theta+3}\left(3\sin^2\theta+1\right)\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2\theta\left(3\sin^2\theta+1\right)d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{3\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2+\cos^2\theta\right\}d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{3\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{3}{4}\sin^2 2\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right\}d\theta$$

$$= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right\} d\theta$$

$$= 6\left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8} \right) + \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 6\left[\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{21}{8}\pi$$