[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{2}$]

★────★

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作（＊）を考える。

（＊）袋 U から球を 1 個取り出し，

（ i ）取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

（ii）取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っていたとする。この袋 U に対して操作（＊）を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1, p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

★────★

(1) p_1 ： $a+3$ 個の球から1個の赤球を取り出す確率なので $p_1=\dfrac{1}{a+3}$

p_2 : 1 回目に赤球を取り出した場合, U の中に赤球がなく, 2 回目に赤球を取り出すことはない。

1 回目に白球を取り出した場合，その確率は $\dfrac{a+2}{a+3}$ で，2 回目に赤球を取り出すのは $a+1$ 個の球から1個の赤球を取り出すので，その確率は $\dfrac{1}{a+1}$ である。

したがって， $p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$

(2) n 回目に赤球を取り出していると, U の中に赤球がなく, $n+1$ 回目に赤球を取り出すことはない。

よって， $n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは， n 回目に白球を取り出し，さらに $n+1$ 回目

に赤球を取り出す場合である。

したがって， $p_{n+1}=(1-p_n)\times\dfrac{1}{a+1}$ （n≧1）…① が成り立つ。

①は $p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\left(p_n-\dfrac{1}{a+2}\right)$ と変形でき，

$$p_{n+1}-\frac{1}{a+2}=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^2\left(p_{n-1}-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\cdots$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(p_1-\frac{1}{a+2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^n\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)$$

よって， $p_n=\dfrac{1}{a+2}+\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{1}{a+2}\right)$ （n≧1）

(3) $$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{1}{a+2}+\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\left\{\frac{m}{a+2}+\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{a+2}+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a+2}\right)\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)}$$

であり， a≧1 より $\left|-\dfrac{1}{a+1}\right|<1$ であるから $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{1}{a+2}$