[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{1}$]

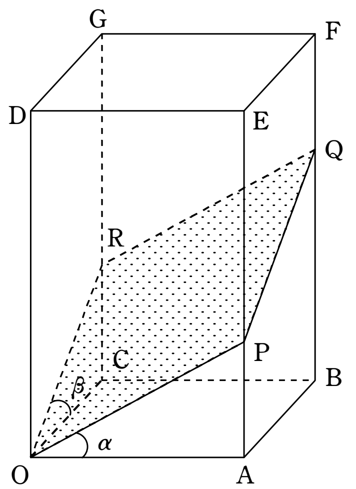
1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 $\mathrm{OABC-DEFG}$ を考える。

3 点 $\mathrm{P, Q, R}$ を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 $\mathrm{O, P, Q, R}$ が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle\mathrm{AOP}$ を α，$\angle\mathrm{COR}$ を β とおく。

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4},\ S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



(1) O を原点とし，$\mathrm{A}(1, 0, 0)$，$\mathrm{B}(1, 1, 0)$，$\mathrm{C}(0, 1, 0)$ となるように座標を考える。

このとき，$\mathrm{P}(1, 0, \tan\alpha)$，$\mathrm{R}(0, 1, \tan\beta)$ と表せる。

四角形 OPQR は平行四辺形であるから

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$

$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2) $S=\dfrac{7}{6}$ より $\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}=\dfrac{7}{6}$

したがって $\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{13}{36}$ …①

$\tan\alpha+\tan\beta=s$， $\tan\alpha\tan\beta=t$ とおくと

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $s>0,\ t>0$ で，

①　⇔　$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{13}{36}$

　⇔　$s^2-2t=\dfrac{13}{36}$ …②

また，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$ ⇔ $\dfrac{s}{1-t}=1$ より $s=1-t$ …③

②，③より $s^2-2(1-s)=\dfrac{13}{36}$ ⇔ $36s^2+72s-85=0$

⇔ $(6s+17)(6s-5)=0$

$s>0$ より $s=\dfrac{5}{6}$ したがって $\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}$

このとき③より $t=\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{6}$ であるから

$\tan\alpha,\ \tan\beta$ は 2 次方程式 $u^2-\dfrac{5}{6}u+\dfrac{1}{6}=0$ …④ の 2 解である。

④　⇔　$6u^2-5u+1=0$ ⇔ $(3u-1)(2u-1)=0$ より $u=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$

$0<\alpha\leqq\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha\leqq\tan\beta$ であるから $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$