[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{1}$]

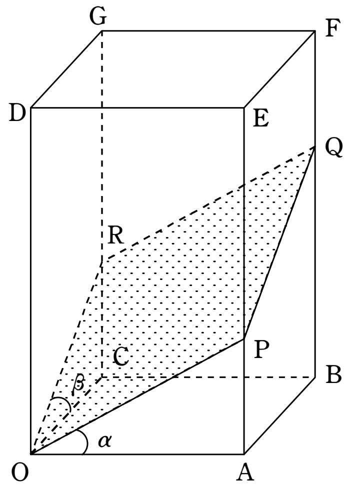
1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC－DEFG を考える。

3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，∠AOP を α，∠COR を β とおく。

(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4},\ S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。

さらに，$\alpha \leqq \beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{2}$]

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作（＊）を考える。

（＊）袋 U から球を 1 個取り出し，

（ i ）取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

（ii）取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っていたとする。この袋 U に対して操作（＊）を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{3}$]

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 1$$

$$C_2 : y = (x-u)^2 + u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1), \mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

ただし，共有点が 1 点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。

$2|x_1y_2 - x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。

定積分 $I = \int_a^b f(u)\,du$ を求めよ。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{4}$]

$p,\ q$ は実数の定数で，$0 < p < 1,\ q > 0$ をみたすとする。関数

$$f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1 + x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1) $0 < x < 1$ のとき，$0 < f(x) < 1$ であることを示せ。

(2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 $x_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p > q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

となることを示せ。

(3) $p < q$ であるとき，

$$c = f(c),\ 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{5}$]

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。

ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r = 2,\ p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) $a_2, a_3, a_4, \cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

[東京大学 2014 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標平面の原点をOで表す。

線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分PQの通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。